

**Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара**

**ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**PROBLEMS OF APPLIED MATHEMATICS  
AND MATHEMATICAL MODELLING**

**ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**Збірник наукових праць  
Випуск 22**

**Дніпро  
ЛІРА  
2022**

УДК 004, 517, 519, 539, 51-76  
ББК 22.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431  
П 32

*Надруковано за рішенням Вченої ради  
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара*

П 32 **Питання прикладної математики і математичного моделювання [Текст]: зб. наук. пр. / редкол.: О.М. Кісельова (відп. ред.) [та ін.]. – Дніпро, 2022. – Вип. 22. – 174 с.**

**Рецензенти:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**  
д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. Б. Вакарчук**

У збірнику вміщено результати фундаментальних та прикладних досліджень із проблем математичного моделювання складних систем, розробки і програмної реалізації ефективних обчислювальних методів та алгоритмів розв'язання актуальних задач оптимізації, математичної фізики та системного аналізу. Призначений для науковців в галузі прикладної математики, викладачів ЗВО, аспірантів та студентів.

В сборнике помещены результаты фундаментальных и прикладных исследований по проблемам математического моделирования сложных систем, разработки и программной реализации эффективных вычислительных методов и алгоритмов решения актуальных задач оптимизации, математической физики и системного анализа. Предназначен для ученых в области прикладной математики, преподавателей, аспирантов и студентов.

The collection of scientific papers contains the results of fundamental and applied research on the problems of mathematical modeling of complex systems, the development and software implementation of effective computational methods and algorithms for solving actual problems of optimization, mathematical physics and system analysis. It is intended for scientists in the field of applied mathematics, teachers of higher education establishments, postgraduate students and students.

УДК 004, 517, 519, 539, 51-76  
ББК 2.12я431+22.311я431+22.176я431+22.18я431

**Редакційна колегія:**

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.М. Кісельова** (відп. ред.); д-р фіз.-мат. наук, проф. **Л.Л. Гарт** (заст. відп. ред.); чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **Н.Д. Панкратова**, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **Ю.Г. Стоян**; д-р техн. наук, проф. **Т.Є. Романова**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Н.А. Гук**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **П.І. Когут**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Дейнеко** (Велика Британія); д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. Мельников** (США); PhD **О. Блюсс** (Велика Британія); канд. фіз.-мат. наук, доц. **О.О. Кузенков** (відп. секр.).

**ISSN 2074-5893**

**doi: 10.15421/32222201**

© Дніпровський національний університет  
імені Олеся Гончара, 2022

**Я.С. Бондаренко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ВИБІРКОВЕ ОБСТЕЖЕННЯ ДОМОГОСПОДАРСТВ STATVILLAGE**

В роботі запропоновано методику статистичного аналізу даних домогосподарств гіпотетичного містечка StatVillage. Розглянуто сучасні методи заповнення пропусків в багатовимірних статистичних даних. Порівняно точність оцінок при простому випадковому відборі без повернення, відборі Бернуллі, систематичному відборі та простому випадковому відборі з поверненням.

**Ключові слова:** вибіркоче обстеження, вибіркочий дизайн, статистичні дані з пропусками, оцінка Горвіца-Томпсона, дизайн-ефект.

**Ya.S. Bondarenko**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **STATVILLAGE HOUSEHOLDS SURVEY SAMPLING**

Methodology of statistical data analysis of households in hypothetical city StatVillage is presented. Advanced techniques for processing multidimensional missing data are examined. Comparisons of estimates accuracy for simple random sampling without replacement, Bernoulli sampling, systematic sampling and simple random sampling with replacement are carried out.

Hypothetical city StatVillage based on real data provides a number of advantages for learning survey sampling methods. Each student of the academic group chooses his own imputation method to handle missing values in statistical data of StatVillage households. There is no universal method for missing values replacement which would be superior in accuracy to all others. Simple imputation methods such as mode imputation and mean imputation have demonstrated performance comparable to advanced imputation methods such as k nearest neighbors, random forest, linear regression, k means. The choice of the imputation method may depend on the types of features with missing values, on the number of objects with missing values, and on the nature of the missing values. Each problem requires an individual approach for imputation missing values.

Each student of the academic group obtains StatVillage maps with marked households for survey sampling. Comparison of the student household maps of the entire academic group illustrates the differences in sampling designs therefore the variation in the values of the parameter estimates arises from the random selection method of households for the sample.

Each student of the academic group obtains point estimates and interval estimates of parameters for their own StatVillage household survey. Point and interval estimates obtained by students of the entire academic group make it possible to construct histograms of distributions for values of point estimates and a set of confidence intervals which contains unknown parameters with a given probability.

Each student of the academic group obtains his own estimates of the design-effect as a measure of the effectiveness of selection strategies using a variety of designs. Estimates of the design-effect obtained by students of the entire academic group allow choose the optimal sample design for household survey in the hypothetical city StatVillage.

**Keywords:** survey sampling, sampling design, statistical data with missing values, Horvitz-Tompson estimates, design-effect.

**Я.С. Бондаренко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ВЫБОРОЧНОЕ ОБСЛЕДОВАНИЕ ДОМОХОЗЯЙСТВ STATVILLAGE**

**В работе предложена методика статистического анализа данных домохозяйств гипотетического городка StatVillage. Рассмотрены современные методы заполнения пропусков в многомерных статистических данных. Проведено сравнение точности оценок при простом случайном отборе без возвращения, отборе Бернулли, систематическом отборе и простом случайном отборе с возвращением.**

**Ключевые слова:** выборочное обследование, выборочный дизайн, статистические данные с пропусками, оценка Горвица-Томпсона, дизайн-эффект.

**Вступ.** Гіпотетичне містечко StatVillage, побудоване на основі реальних статистичних даних, доцільно використовувати при навчанні студентів методам вибірових обстежень [1]. Студентам надається клікабельна мапа містечка, на якій розташовані домогосподарства. Після того, як студенти позначають житлові будинки для обстеження, вони надсилають запит на сервер, який повертає статистичні дані, які є фактичними спостереженнями домогосподарств, здобутими Статистичним Управлінням Канади під час перепису 1991 року [2]. Містечко StatVillage має три інтерактивні мапи. Максимальна конфігурація Maximal Village містечка StatVillage складається з масиву зі 128 блоків, причому кожен блок складається з 8 житлових будинків, загалом 1024 будинка. У цій конфігурації використовується простий макет для того, щоб студенти зосередилися на порівнянні вибірових дизайнів в простих популяціях, перш ніж переходити до більш складних популяцій. Тим не менш, такий макет дозволяє студентам відбирати одиниці спостережень за допомогою простого випадкового відбору, систематичного відбору, кластерного відбору, двостадійного і двофазного відборів. Мінімальна конфігурація Mini Village містечка StatVillage складається з 60 блоків, кожен блок містить 8 житлових будинків, загалом 480 будинків. Мікро конфігурація Micro Village містечка StatVillage складається з 36 блоків, кожен блок містить 8 житлових будинків, загалом 288 будинків. Mini Village та Micro Village корисні в ситуаціях, коли проблеми з технічним або програмним забезпеченням не дозволяють працювати з максимальною конфігурацією містечка StatVillage.

Статистичні дані для побудови містечка StatVillage були відібрані навмання із записів домогосподарств (односімейні будинки або одноповерхові квартири у Ванкувері, Британській Колумбії, Канаді) з файлу мікроданих перепису населення 1991 року для громадського користування про домогосподарства та житло [2]. Файл мікроданих містить анонімні відповіді, зокрема, демографічні змінні – розмір домогосподарства та склад домогосподарства за віковими показниками та статтю; змінні доходу – зайнятість, інвестиції, державні трансферти тощо; характеристики житла – тип, рік побудови, власне чи

орендоване, орієнтовна вартість, місячна вартість проживання тощо; характеристики що найменше двох утримувачів домогосподарства (дорослі, відповідальні за добробут домогосподарства) – вік, стать, рід занять, рідна мова, освіта, статус зайнятості тощо.

Навчальна програма курсу з методів вибірових обстежень складається з низки теоретичних відомостей, зокрема, основних формул для оцінок параметрів популяції, дисперсій цих оцінок та оцінок дисперсій, та практичних задач, при цьому витрати часу на фактичний збір даних або розробку дизайнів обстежень невеликі. Методиці збору даних для простих вибірових обстежень присвячена низка джерел [3-12], але важко змусити студентів збирати дані за більш складними вибіровими схемами. Ще важче повторити збір даних щодо однієї реальної популяції, використовуючи різні вибірові схеми для того, щоб студенти могли порівняти дизайни на практиці. Тому для усвідомлення студентами особливостей, які виникають при аналізі реальних статистичних даних, наполегливо рекомендується використовувати гіпотетичне містечко StatVillage при вивченні методів вибірових обстежень.

**Постановка задачі.** Розробити методику проведення статистичного аналізу даних домогосподарств гіпотетичного містечка StatVillage.

**Обсяг вибірки.** Визначення обсягу вибірки є ітераційною процедурою, складність якої полягає у тому, що практично всі параметри оцінюються або експертно, або за даними пілотних обстежень. Методика формування вибірки для проведення вибірових обстежень населення складається з таких етапів:

- 1) обчислюються  $\hat{y}$  – оцінка середнього значення ознаки,  $\hat{Y}$  – оцінка сумарного значення ознаки,  $\hat{w}$  – оцінка частки елементів з певною властивістю;
- 2) оцінюється значення дисперсії  $\sigma_{srs}^2$  кожної ознаки за умови побудови вибірки за допомогою простого випадкового відбору;
- 3) проводиться оцінка дизайн-ефекту  $d\hat{eff}$  (відношення варіації оцінки ознаки для реального дизайну вибірки до варіації оцінки цієї ж ознаки за умови побудови вибірки за допомогою простого випадкового відбору);
- 4) встановлюються вимоги щодо надійності оцінок ознак (коефіцієнт варіації CV оцінки обирається від 1% до 10%);
- 5) розраховуються обсяги вибірки для отримання надійних оцінок для кожної ознаки.

Обсяг вибірки для оцінювання середнього значення дорівнює

$$n = d\hat{eff} \cdot \hat{\sigma}_{srs}^2 \cdot \left( \frac{100\%}{CV \cdot \hat{y}} \right)^2.$$

Обсяг вибірки для оцінювання сумарного значення дорівнює

$$n = d\hat{eff} \cdot N^2 \cdot \hat{\sigma}_{srs}^2 \cdot \left( \frac{100\%}{CV \cdot \hat{Y}} \right)^2.$$

Обсяг вибірки для оцінювання частки елементів з певною властивістю дорівнює

$$n = d\hat{e}ff \cdot \hat{\sigma}_{srs}^2 \cdot \left( \frac{100\%}{CV \cdot \hat{\omega}} \right)^2.$$

- 6) із розрахованих обсягів вибирається максимальний;
- 7) визначається прийнятний обсяг вибірки з урахуванням організаційних та фінансових можливостей. У випадку недостатності коштів для забезпечення проведення обстеження необхідно зменшити надійність оцінок показників (пункт 4), після цього розрахувати нові обсяги вибірки (пункт 5) і повторити пункти 6, 7;
- 8) проводиться стратифікація вибірки за умови наявності страт;
- 9) проводиться коригування обсягу вибірки з урахування навантаження інтерв'юера;
- 10) проводиться коригування обсягу вибірки у зв'язку з відмовами респондентів.

Наведена схема обчислення обсягу вибірки виявила свою ефективність при формуванні вибірок для проведення вибіркових обстежень населення [13].

**Методи заповнення пропусків в багатовимірних даних.** Нехай статистичні дані представлені матрицею об'єктів-ознак  $X^{(n \times d)}$ , де  $n$  – кількість об'єктів,  $d$  – кількість ознак. Частина значень матриці ознак відсутні. Необхідно відновити матрицю об'єктів-ознак з метою подальшого застосування методів вибіркових обстежень.

Найпростішим методом розв'язання задачі обробки пропущених значень є видалення об'єктів (рядків матриці об'єктів-ознак), що мають пропуски в даних. Метод застосовується лише у тому випадку, коли невелика частина об'єктів вибірки має пропущені значення. Недоліками даного методу можна вважати втрату інформації при виключенні об'єктів. Видалення ознак (стовбців матриці об'єктів-ознак), що мають пропуски в даних, є альтернативним методом при наявних пропусках у невеликій кількості ознак.

Другим найпростішим методом заповнення пропусків є заповнення пропущених даних *модю* або *середнім значенням* за кожною ознакою. Як правило, пропуски в категоріальних ознаках заповнюються модю, в кількісних ознаках – середнім значенням [15].

Третім найпростішим методом заповнення пропущених даних є заповнення пропусків за допомогою *сингулярного розкладу матриці ознак*. Спочатку відбувається заміна пропусків вибірковим середнім значенням, обчисленим за даними без пропусків за кожною ознакою матриці об'єктів-ознак  $X^{(n \times d)}$  і для збереження природності даних значення в заповнених пропусках замінюються на найближчі унікальні значення за кожною ознакою.

Знаходиться розкладання матриці ознак  $X^{(n \times d)}$  у вигляді

$$X^{(n \times d)} = U^{(n \times n)} S^{(n \times d)} V^{(d \times d)},$$

де  $S^{(n \times d)}$  – сингулярна матриця, тобто діагональна матриця, на головній діагоналі якої розташовані корені з власних значень матриці  $X^{(n \times d)} \left( X^{(n \times d)} \right)^T$  в

порядку спадання. Матриці  $U^{(n \times n)}$ ,  $V^{(d \times d)}$  є ортогональними, при цьому стовбці матриці  $U^{(n \times n)}$  є власними векторами матриці  $X^{(n \times d)}$ , а матрицю  $V^{(d \times d)}$  можна подати у вигляді  $V^{(d \times d)} = (S^{(n \times d)})^{-1} (U^{(n \times n)})^T X^{(n \times d)}$ .

Перші  $r$  рядків та стовбців виділяються в матриці  $S^{(n \times d)}$ , а ті, що залишилися видаляються. Перші  $r$  значущих сингулярних чисел називаються головними компонентами.

Виділивши в матриці  $U^{(n \times n)}$  перші  $r$  стовбців –  $U^{(n \times r)}$ , а в матриці  $V^{(d \times d)}$  перші  $r$  рядків –  $V^{(r \times d)}$ , можна відновити матрицю ознак

$$X_{approx}^{(n \times d)} = U^{(n \times r)} S^{(r \times r)} V^{(r \times d)}.$$

Відбувається заміна значень в заповнених пропусках в матриці ознак  $X^{(n \times d)}$  на значення, здобуті у відновленій матриці  $X_{approx}^{(n \times d)}$ .

Кроки 2, 3, 4 можна повторити заздалегідь задане число разів для покращення відновлення матриці ознак або скористатися критерієм якості відновлення матриці, обчисливши близькість до одиниці коефіцієнта детермінації:

$$Q(r) = \frac{\sum_{k=1}^r \lambda_k}{\sum_{k=1}^n \lambda_k},$$

де  $\lambda_k$  – власні значення матриці  $X^{(n \times d)} (X^{(n \times d)})^T$ . Залежність коефіцієнта детермінації  $Q(r)$  від числа головних компонент  $r$  дозволяє оцінити ефективність методу.

Наприкінці значення в заповнених пропусках замінюються на найближчі унікальні значення за кожною ознакою матриці  $X_{approx}^{(n \times d)}$  для збереження природності даних [15].

При заповненні пропусків за допомогою *методу  $k$  найближчих сусідів* висувається гіпотеза про те, що близькі об'єкти мають близькі значення ознак. Тому пропущені значення ознак певного об'єкту можна відновити за відомими значеннями ознак  $k$  «найближчих сусідів» цього об'єкту [15].

При заповненні пропусків за допомогою *випадкового лісу* для кожної ознаки з пропусками розв'язується задача прогнозування за допомогою випадкового лісу (при цьому навчання проводиться по об'єктах без пропусків по даній ознаці). Заміна пропущених значень в кожній ознаці проводиться за допомогою прогнозу композиції дерев, здобутому при розв'язанні задачі прогнозування [15].

При заповненні пропусків за допомогою *лінійної регресії* для кожної ознаки з пропусками розв'язується задача прогнозування за допомогою лінійної регресії (при цьому навчання проводиться по об'єктах без пропусків по даній ознаці). Заміна пропущених значень в кожній ознаці проводиться за допомогою прогнозу, здобутому при розв'язанні задачі лінійної регресії [15].

При заповненні пропусків за допомогою *методу  $k$  середніх* висувається гіпотеза про те, що близькі об'єкти мають близькі значення ознак. Тому пропущені значення ознак певного об'єкту можна відновити за відомими значеннями ознак центру кластеру, якому належить об'єкт з пропусками [15].

**Простий випадковий відбір без повернення.** Обсяг вибірки для ПВВБП обчислюється за допомогою методики формування вибірок. Оцінки середнього значення ознаки  $\hat{y}$ , сумарного значення ознаки  $\hat{Y}$ , частки одиниць з певною властивістю  $\hat{\omega}$ , дисперсії  $\hat{\sigma}_{srs}^2$  знаходяться за статистичними даними містечка Micro Village. Оцінка дизайн-ефекту та коефіцієнту варіації прийняті  $d\hat{eff} = 1$ ,  $CV = 5\%$  відповідно. Обсяг вибірки становить  $n_1$ . Проста випадкова вибірка обсягом  $n_1$  домогосподарств відбирається з містечка Maximal Village. Знаходяться оцінки Горвіца-Томпсона  $\hat{t}_\pi$ ,  $\hat{y}_\pi$ ,  $\hat{P}_d$  при ПВВБП для сумарного значення, середнього значення та частки елементів з певною властивістю [9].

**Відбір Бернуллі.** Обсяг вибірки для відбору Бернуллі обчислюється за допомогою методики формування вибірок. Оцінки середнього значення ознаки  $\hat{y}$ , сумарного значення ознаки  $\hat{Y}$ , частки одиниць з певною властивістю  $\hat{\omega}$ , дисперсії  $\hat{\sigma}_{srs}^2$ , дизайн-ефекту  $d\hat{eff}$  знаходяться за статистичними даними містечка Micro Village. Коефіцієнт варіації  $CV$  дорівнює 5%. Обсяг вибірки становить  $n_2$ . Вибірка обсягом  $n_2$  домогосподарств відбирається з містечка Maximal Village за допомогою відбору Бернуллі (імовірність включення домогосподарства у вибірку становить 0,5). Знаходяться оцінки Горвіца-Томпсона  $\hat{t}_\pi$ ,  $\hat{y}_\pi$ ,  $\hat{P}_d$  при відборі Бернуллі для сумарного значення, середнього значення та частки елементів з певною властивістю [9].

**Систематичний відбір.** Обсяг вибірки для систематичного відбору обчислюється за допомогою методики формування вибірок. Оцінки середнього значення ознаки  $\hat{y}$ , сумарного значення ознаки  $\hat{Y}$ , частки одиниць з певною властивістю  $\hat{\omega}$ , дисперсії  $\hat{\sigma}_{srs}^2$ , дизайн-ефекту  $d\hat{eff}$  знаходяться за статистичними даними містечка Micro Village. Коефіцієнт варіації  $CV$  дорівнює 5%. Обсяг вибірки становить  $n_3$ . Вибірка обсягом  $n_3$  домогосподарств відбирається з містечка Maximal Village за допомогою систематичного відбору. Знаходяться оцінки Горвіца-Томпсона при систематичному відборі для сумарного значення, середнього значення та частки елементів з певною властивістю [9].

**Простий випадковий відбір з поверненням.** Обсяг вибірки для ПВВзП обчислюється за допомогою методики формування вибірок. Оцінки середнього значення ознаки  $\hat{y}$ , сумарного значення ознаки  $\hat{Y}$ , частки одиниць з певною властивістю  $\hat{\omega}$ , дисперсії  $\hat{\sigma}_{srs}^2$ , дизайн-ефекту  $d\hat{eff}$  знаходяться за статистичними даними містечка Micro Village. Обсяг вибірки для простого випадкового відбору з поверненням становить  $n_4$ . Проста випадкова вибірка



без повернення відбирається з містечка Maximal Village за допомогою метода накопичених сум. Знаходяться оцінки Горвіца-Томпсона  $\hat{t}_\pi$ ,  $\hat{y}_\pi$ ,  $\hat{P}_d$  для сумарного значення, середнього значення та частки елементів з певною властивістю [9].

**Оцінка дизайн-ефекту.** У теорії вибірових обстежень простому випадковому відбору без повернення надана роль еталона, з яким порівнюють усі інші відбори. Обчислимо оцінку дизайн ефекту:

$$deff(p(s), \hat{t}_\pi) = \frac{\hat{D}\hat{t}_\pi}{\hat{D}_{ПВВБП}\hat{t}_\pi},$$

де  $\hat{D}\hat{t}_\pi$  – оцінка дисперсії відбору за допомогою вибірового дизайну  $p(s)$ ,  $\hat{D}_{ПВВБП}\hat{t}_\pi$  – оцінка дисперсії при ПВВБП. Дизайн-ефект визначає ефективність стратегії відбору за допомогою вибірового дизайну  $p(s)$  порівняно з ПВВБП. А саме: якщо

$$deff(p(s), \hat{t}_\pi) < 1,$$

то здобуємо точніші результати за допомогою вибірового дизайну  $p(s)$  порівняно з ПВВБП, в супротивному разі – ні. Оскільки в обох випадках використовується оцінка Горвіца-Томпсона  $\hat{t}_\pi$ , то причиною відмінностей дисперсій оцінок є вибіровий дизайн  $p(s)$ . Аналогічні міркування мають місце для оцінок  $\hat{y}_\pi$  та  $\hat{P}_d$ .

Статистичний аналіз даних гіпотетичного містечка StatVillage виконано за допомогою мови програмування R. Здобуті результати говорять про ефективність систематичного відбору при оцінюванні таких ознак домогосподарств StatVillage як вартість житла, вартість комунальних послуг за місяць, загальний дохід, кількість жителів домогосподарств та наявність іпотеки.

**Висновки.** Гіпотетичне містечко StatVillage надає низку переваг для вивчення курсу з методів вибірових обстежень.

Кожен студент академічної групи обирає власний метод заповнення пропусків в статистичних даних домогосподарств містечка StatVillage. Не існує універсального методу заповнення пропущених значень, який би перевершував за якістю інші методи. Вибір методу може залежати від типів ознак, у яких виникають пропуски, від кількості об'єктів з пропущеними значеннями, від природи виникнення пропусків. У кожній задачі необхідний індивідуальний підхід до вибору методу відновлення пропущених значень.

Кожен студент академічної групи здобуває мапи містечка StatVillage з позначеними домогосподарствами для обстеження. Порівняння мап домогосподарств студентів всієї академічної групи ілюструє відмінності вибірових дизайнів, отже, варіація значень оцінок параметрів виникає внаслідок випадкового методу відбору домогосподарств до вибірки.

Кожен студент академічної групи здобуває точкові та інтервальні оцінки параметрів власного обстеження домогосподарств StatVillage. Точкові та інтервальні оцінки параметрів, здобуті студентами всієї академічної групи, до-

звояють побудувати гістограми розподілів значень точкових оцінок параметрів та множини довірчих інтервалів, які містять невідомі параметри з заданою ймовірністю.

Кожен студент академічної групи здобуває власні оцінки дизайн-ефектів як міри ефективності стратегій відборів за допомогою різноманітних дизайнів. Оцінки дизайн-ефектів, здобуті студентами всієї академічної групи, дозволяють обрати оптимальний вибірковий дизайн вибіркового обстеження домогосподарств гіпотетичного містечка StatVillage.

### Бібліографічні посилання

1. Schwarz, C. J. StatVillage: An On-Line, WWW-Accessible, Hypothetical City Based on Real Data for Use in an Introductory Class in Survey Sampling. *Journal of Statistics Education* 5(2), 1997.
2. Statistics Canada, User Documentation for Public Use Microdata File on Households and Housing, Ottawa, Ontario: Statistics Canada, 1994.
3. J. G. Bethlehem. Applied survey methods: a statistical perspective, John Wiley & Sons, New York, 2009.
4. W. G. Cochran. Sampling Techniques, John Wiley & Sons, New York, 1977.
5. P.S. Levy, S. Lemeshov. Sampling of Population: Methods and Applications, 4th Edition, John Wiley & Sons, New York, 2008.
6. S.L. Lohr. Sampling: Design and Analysis, Cengage Learning, 2009.
7. C.-E. Sarndal, B. Swensson, J. Wretman. Model Assisted Survey Sampling, Springer, New York, 1992.
8. R.L. Scheaffer, III W. Mendenhall, R.L. Ott, K. G. Gerow. Elementary Survey Sampling, 7th Edition, Cengage Learning, 2011.
9. Василик О.І., Яковенко Т.О. Лекції з теорії і методів вибірових обстежень: навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 208 с.
10. Пархоменко В.М. Методи вибірових обстежень. К.:ТВиМС, 2001. 148 с.
11. Черняк О.І. Техніка вибірових обстежен. К.: МІВВЦ, 2001. 248 с.
12. Саріогло В.Г. Проблеми статистичного зважування вибірових даних. К.: ІВЦ Держкомстату України, 2005. 264 с.
13. Гладун О.М. Вибіркові обстеження населення: методологія, методика, практика: Монографія. Ніжин: ТОВ Видавництво Аспект-Поліграф, 2008. 348 с.
14. Little, R. J. A., Rubin, D. B. Statistical Analysis with Missing Data. John Wiley & Sons, New York, 2002.
15. Bondarenko Yana Statistical Analysis with Missing Data. *Proceedings of the Baltic-Nordic-Ukrainian Workshop on Survey Statistics 2022*. Tartu, Estonia, 2022, pp. 35-39.

Надійшла до редколегії 08.09.2022.

**А.Ф. Булат<sup>1</sup>, О.М. Кісельова<sup>2</sup>, Л.Л. Гарт<sup>2</sup>, О.М. Придуманова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Інституті геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України,*

<sup>2</sup> *Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ**

Досліджено математичні моделі та підходи до розв'язання двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття з нечіткими початковими даними. Ці задачі узагальнюють, з одного боку, класичні скінченновимірні транспортні задачі на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами; з іншого боку, вони узагальнюють дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

**Ключові слова:** нескінченновимірна транспортна задача, задача оптимального розподілу-розбиття, нечіткі параметри, нейронечіткі технології.

**A.F. Bulat<sup>1</sup>, O.M. Kiselyova<sup>2</sup>, L.L. Hart<sup>2</sup>, O.M. Prytomanova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics, NAS of Ukraine,*

<sup>2</sup> *Oles Honchar Dnipro National University*

## **MATHEMATICAL MODELS OF TWO-STAGE PROBLEMS OF OPTIMAL LOCATION-PARTITIONING UNDER UNCERTAINTY**

Currently, the term logistics is widely used in business and economic activity. It defines the theory and practice of moving raw materials, materials, production, labor and financial resources, finished products from source to consumer. Most logistical problems are usually studied under conditions of certainty; however, real situations for which logistical models are created are most often characterized by a certain degree of uncertainty. In these options, the quality of decisions made in the optimization logistic models is directly dependent on the completeness of taking into account all uncertain causes. Therefore, it is relevant to study logistical problems in cases where some parameters included in the description of the model are fuzzy, inaccurate, underdetermined, or there is an unreliable mathematical description of some dependencies in the model, and the like.

In this paper, the most common logistical problems are considered: transportation and optimal location-partitioning ones. Particular attention is paid to mathematical models and approaches to solving two-stage continuous-discrete problems of optimal location-partitioning. These problems are characterized by the presence of two stages and consist in determining the zones of collecting a continuously allocated resource (raw materials) by the enterprises of the first stage and the volume of transportation of the processed product from the enterprises of the first stage to consumers (points of the second stage) in order to minimize the total cost of transporting the resource from suppliers through processing (collection, storage) points to consumers. Two-stage continuous-discrete problems of

optimal partitioning-allocation, on the one hand, generalize the classical finite-dimensional transportation problems for the case when the volumes of production (storage, processing) at given points are unknown in advance and are found as a solution to the corresponding continuous problem of optimal partitioning of the set of consumers (suppliers of a continuously allocated resource) into areas served by these points; on the other hand, they generalize discrete two-stage production-transportation problems to the case of a continuously allocated resource.

The paper studies two-stage continuously discrete optimal partitioning-allocation problems with fuzzy initial data. The solution of two-stage problems of optimal partitioning-allocation is based on a unified approach, which consists in reducing the original infinite-dimensional problems of optimal partitioning-allocation to non-smooth, as a rule, finite-dimensional optimization problems, for the numerical solution of which effective methods of undifferentiated optimization – Shor's algorithms – are used. The method and algorithm for solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with fuzziness in the objective functional are based on the principle that first, to restore the exact values of fuzzy parameters in the objective functional, the neurolinguistic identification method is used. Then the optimal partition is found using the methods of the theory of optimal set partitioning and the method of potentials for solving the transportation problem.

**Keywords:** infinite-dimensional transportation problem, optimal partitioning-allocation problem, fuzzy parameters, neuro-fuzzy technologies.

**А.Ф. Булат<sup>1</sup>, Е.М. Киселева<sup>2</sup>, Л.Л. Гарт<sup>2</sup>, О.М. Притоманова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Институт геотехнической механики им. М.С. Полякова НАН Украины,*

<sup>2</sup> *Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУХЭТАПНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ-РАЗБИЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

Исследованы математические модели и подходы к решению двухэтапных задач оптимального размещения-разбиения с нечеткими исходными данными. Эти задачи обобщают, с одной стороны, классические конечномерные транспортные задачи на случай, когда объемы производства (хранения, переработки) в заданных пунктах неизвестны заранее и отыскиваются как решение соответствующей непрерывной задачи оптимального разбиения множества потребителей (поставщиков непрерывно распределенного ресурса) на сферы обслуживания их этими пунктами; с другой стороны, они обобщают дискретные двухэтапные производственно-транспортные задачи на случай непрерывно распределенного ресурса.

**Ключевые слова:** бесконечномерная транспортная задача, задача оптимального распределения-разбиения, нечеткие параметры, нейронечеткие технологии.

**Вступ.** В даний час термін *логістика* широко використовується в бізнесі та визначає теорію і практику переміщення сировини, матеріалів, виробничих, трудових та фінансових ресурсів, готової продукції від їхнього джерела до споживача. Основна мета логістики – забезпечити наявність необхідного продукту у необхідній кількості, у необхідному стані, у необхідному місці, у необхідний час та за прийнятною для споживача ціною і з мінімальними для підприємства витратами. У ряді випадків задачу зниження витрат у конкретній області можна формалізувати шляхом зведення її до однієї з відомих ло-

гістичних моделей із застосуванням математичних методів розв'язання задач такого класу і таким чином отримати її оптимальний розв'язок.

До найбільш застосовуваних на практиці логістичних моделей належать транспортні моделі. Метою розв'язання транспортної задачі є знаходження такого плану перевезень продукції, за якого загальні транспортні витрати були б найменшими. Така задача та її математична модель вперше була сформульована у 1942 р. Ф. Хічкоком у його статті «Distribution of a product from several sources to numerous localities». З часом сфера застосування транспортної моделі розширювалася, а сама модель вдосконалювалася та інтегрувалася з іншими моделями, передусім з моделями сфери виробництва. Йдеться, наприклад, про виробничо-транспортні задачі, як задачі планування розвитку та розміщення підприємств [1]; про багатоетапні транспортні задачі, коли продукція від постачальників до споживачів надсилається через деякі проміжні пункти [2]; про нескінченновимірні транспортні задачі, тощо.

Відзначимо, що переважна більшість логістичних задач досліджувалася в умовах визначеності. Однак реальні ситуації, для яких створюються логістичні моделі, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних логістичних моделях знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, суттєвих для наслідків від прийнятих рішень. Тому актуальною є розробка логістичних задач не тільки в умовах визначеності, а й у випадках, коли або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, недовизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі та ін.

У цій статті розглянуто окремі постановки логістичних транспортних задач, задач розміщення-розбиття (location-allocation), у тому числі й в умовах невизначеності, а також підходи до їх розв'язання із застосуванням синтезу теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) та нейронечітких технологій.

**Постановка задачі.** Транспортні моделі часто описують переміщення (перевезення) будь-якого товару з пункту відправлення (початковий пункт, наприклад, місце виробництва) до пункту призначення (склад, магазин, сховище). Призначення транспортної задачі – визначити обсяг перевезень із пунктів відправлення до пунктів призначення з мінімальною сумарною вартістю перевезень. При цьому повинні враховуватися обмеження, що накладаються на обсяги вантажів, що є у пунктах відправлення (пропозиції), та обмеження, що враховують потребу вантажів у пунктах призначення (попит). У транспортній моделі передбачається, що вартість перевезення за будь-яким маршрутом прямо пропорційна обсягу вантажу, що перевозиться цим маршрутом. У загальному випадку транспортну модель можна використовувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами, управлінням рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу та ін.

На рис. 1 зображено загальне подання транспортної задачі у вигляді мережі з  $m$  пунктами відправлення і  $n$  пунктами призначення, які показані у вигляді вузлів мережі. Дуги, що з'єднують вузли мережі, відповідають маршру-

там, що зв'язують пункти відправлення та призначення. З дугою  $(i, j)$ , що з'єднує пункт відправлення  $i$  з пунктом призначення  $j$ , співвідносяться два види даних: вартість  $c_{ij}$  перевезення одиниці вантажу з пункту  $i$  в пункт  $j$  і кількість  $x_{ij}$  вантажу, що перевозиться. Обсяг вантажів у пункті відправлення  $i$  дорівнює  $a_i$ , а обсяг вантажів у пункті призначення  $j$  дорівнює  $b_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Задача полягає у визначенні величин  $x_{ij}$ , що мінімізують сумарні транспортні витрати  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$  та задовольняють обмеження, що накладаються на обсяги вантажів у пунктах відправлення (пропозиції) та пунктах призначення (попит).

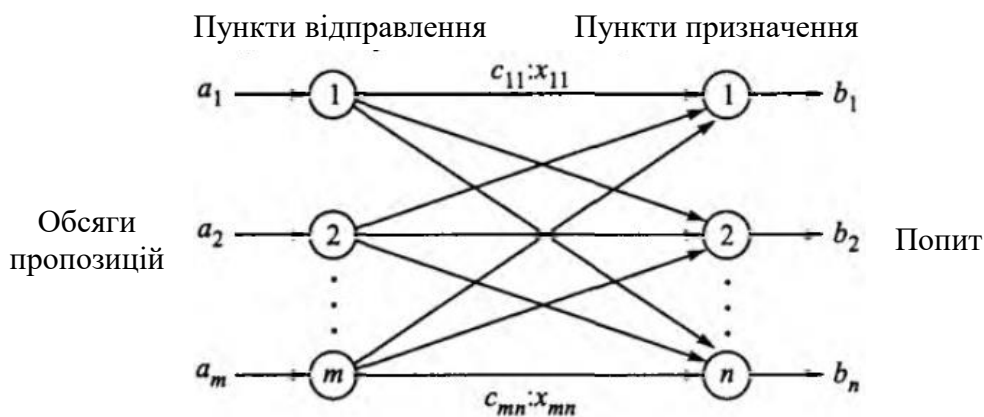


Рис. 1. Схема класичної транспортної задачі

Наведемо формальну постановку класичної транспортної задачі.

*Задача 1 (класична транспортна задача)* [3]. Знайти  $x_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , які забезпечують

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

де наведені формули мають такий сенс: цільова функція транспортної задачі прямує до мінімуму (1); загальний обсяг вантажу, що вивозиться від кожного постачальника, не повинен перевищувати його запасу (2); обсяг вантажу, який надходить кожному споживачеві, не повинен бути менше від його потреб (3); обсяги вантажу на кожному з маршрутів мають бути невід'ємними (4).

Вочевидь, транспортна задача є задачею лінійного програмування з  $m \times n$  змінними і  $m+n$  непрямими обмеженнями. Ідеальний випадок, коли сума можливих поставок точно дорівнює сумі потреб

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = d, \quad (5)$$

приводить до так званої *закритої транспортної задачі*. В цьому випадку задача (1)-(5) допустима і розв'язувана. Хоча транспортна задача може бути розв'язана як звичайна задача лінійного програмування, її спеціальна структура дозволяє розробити алгоритм зі спрощеними обчисленнями, що базується на симплексних відносинах двоїстості, наприклад, метод потенціалів [4].

Якщо перевезення продукції виконується не безпосередньо від постачальника до споживача, а через деякі проміжні пункти, то застосовується двоетапна транспортна задача. Відповідну схему функціонування перевезень вантажу наведено на рис. 2. Проміжними пунктами можуть бути посередницькі фірми та різного роду сховища (склади).

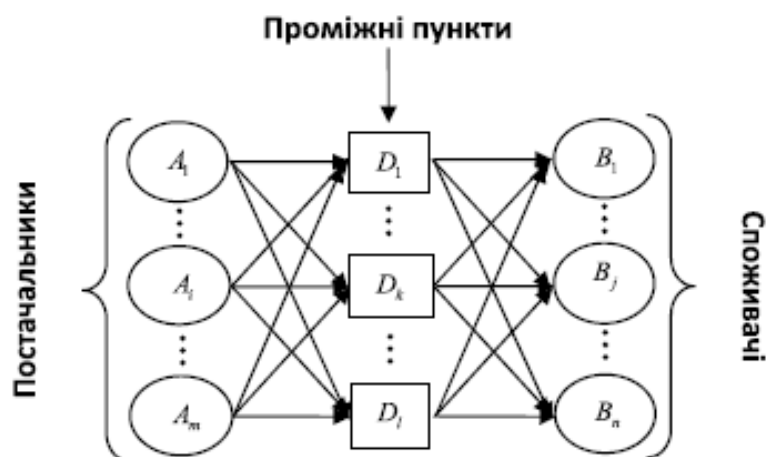


Рис. 2. Система «постачальники – проміжні пункти – споживачі» у двоетапній транспортній задачі

Нехай, як і для задачі 1, в  $m$  пунктах постачання  $A_1, \dots, A_m$  є відповідно  $a_1, \dots, a_m$  одиниць продукції, яку потрібно перевезти до  $n$  споживачів  $B_1, \dots, B_n$ , задовольнивши їх потреби  $b_1, \dots, b_n$ , але для транспортування продукції від постачальників для споживачів можна задіяти  $p$  проміжних пунктів  $D_1, \dots, D_p$ .

Позначимо через  $x_{ik}^{(1)}$  ( $i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, p$ ) кількість продукції, яка перевозиться від  $i$ -го пункту постачання  $A_i$  до  $k$ -го проміжного пункту  $D_k$ , а через  $c_{ik}^{(1)}$  – витрати на перевезення одиниці цієї продукції. Кількість продукції, яка перевозиться з  $k$ -го проміжного пункту  $D_k$  до  $j$ -го споживача  $B_j$  позначимо через  $x_{kj}^{(2)}$  ( $k=1, 2, \dots, p; j=1, 2, \dots, n$ ), витрати на перевезення одиниці цієї продукції позначимо через  $c_{kj}^{(2)}$  та запишемо математичну модель задачі.

**Задача 2** (двоетапна транспортна задача) [2]. Знайти  $x_{ik}^{(1)}$ ,  $x_{kj}^{(2)}$ ,  $i=1,2,\dots,m$ ;  $k=1,2,\dots,p$ ;  $j=1,2,\dots,n$ , які забезпечують

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p c_{ik}^{(1)} x_{ik}^{(1)} + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n c_{kj}^{(2)} x_{kj}^{(2)} \quad (6)$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^p x_{ik}^{(1)} = a_i, \quad i=1,2,\dots,m, \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^p x_{kj}^{(2)} = b_j, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik}^{(1)} - \sum_{j=1}^n x_{kj}^{(2)} = 0, \quad k=1,2,\dots,p, \quad (9)$$

$$x_{ik}^{(1)} \geq 0, \quad x_{kj}^{(2)} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m; \quad k=1,2,\dots,p; \quad j=1,2,\dots,n. \quad (10)$$

Задача (6)-(10) є задачею лінійного програмування, яка містить  $m \times p + p \times n$  змінних  $x_{ik}^{(1)}$ ,  $x_{kj}^{(2)}$  та  $m+n+p$  непрямих обмежень. Цільова функція (6) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Обмеження (7) означають транспортування усієї продукції  $a_1, \dots, a_m$  з пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (8) означають транспортування продукції  $b_1, \dots, b_n$ , яку потрібно доставити з проміжних пунктів до споживачів. Обмеження (9) задають умови на те, щоб уся продукція, яка надходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов'язково відправлена споживачам. Це визначає умови на сумісність системи обмежень лінійних рівностей та лінійних нерівностей (7)-(10). Для розв'язання двоетапної транспортної задачі застосовують різного роду спеціалізовані алгоритми [2, 3].

Необхідно відзначити, що задачі 1 і 2 є скінченновимірними. Необхідність постановки нескінченновимірних транспортних задач виникає у випадках, коли споживачів "дуже багато" і формулювання транспортної задачі як дискретної математичної моделі стає недоцільною через труднощі, пов'язані з розв'язанням задач надмірно великої розмірності. Існують також задачі, у яких множина, що розбивається на підмножини, вже від самого початку континуальна за своєю структурою.

**Нескінченновимірна транспортна задача та неперервна задача оптимального розміщення-розбиття.** Перші теоретичні результати та методи розв'язання нескінченновимірної транспортної задачі були опубліковані Л.В. Канторовичем у 1942 році у зв'язку з розв'язанням класичної проблеми Г. Монжа (задача про рови та насипи), сформульованою ним ще у 1784 році. У подальшому модифікації та узагальнення задачі про переміщення мас досліджувалися Л.В. Канторовичем та Г.Ш. Рубінштейном за допомогою розвинутого ними функціонально-аналітичного методу [5].

Більш загальними ніж нескінченновимірні транспортні задачі є нескінченновимірні задачі розміщення (location) підприємств з одночасним розбиттям



даного регіону (множини), неперервно заповненого споживачами, на області споживачів (підмножини), кожна з яких обслуговується одним підприємством, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат. Оптимізаційні задачі виробничо-транспортного планування відносяться до найбільш поширеного типу логістичних задач, що виникають під час аналізу питань як довгострокового, так і поточного планування [1]. Такі задачі розміщення-розбиття (location-allocation problems) розглядаються як у неперервній, так і в дискретній постановках. У ролі споживачів тут можуть виступати й телефонні абоненти, школярі, виборці, точки зрошеної території, пацієнти для діагностики захворювань тощо. Особливий інтерес викликають неперервні нескінченновимірні задачі розміщення-розбиття, у яких споживчий попит у сфері розміщення задається неперервною функцією щільності.

З розв'язання наступної спрощеної моделі нескінченновимірної задачі розміщення виробництва починалась розробка математичної теорії оптимального розбиття множин [6]. Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області  $\Omega \subset E_2$ . Скінченна кількість  $N$  виробників цієї продукції розташовані в ізольованих точках  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , області  $\Omega$ . Вважаються заданими:  $\rho(x)$  – попит на продукцію споживача з координатами  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ ;  $c(x, \tau_i)$  – вартість транспортування одиниці продукції від виробника  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$  споживачеві  $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$ . Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат. Для кожного  $i$ -го виробника задана функція  $\phi_i(Y_i)$ , що описує залежність вартості виробництва від його потужності  $Y_i$ , яка визначається за формулою  $Y_i = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx$ , і зведені капітальні витрати на реконструкцію  $i$ -го виробника для збільшення його потужності від існуючої до проекційної  $Y_i$ . Множину споживачів  $\Omega$  можна розбивати на зони обслуговування  $\Omega_i$  споживачів  $i$ -м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, N \quad (i \neq j), \quad (11)$$

де  $\text{mes}(\cdot)$  означає міру Лебега (не виключається, що деякі з підмножин  $\Omega_i$  виявляться порожніми). При цьому потужність  $i$ -го виробника визначається сумарним попитом споживачів з  $\Omega_i$ , і не перевищує заданих обсягів:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега, а міра множини межових точок підмножин  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  вважається рівною нулю.

*Задача 3 (нескінченновимірна задача розміщення виробництва)* [6]. Потрібно розбити множину споживачів  $\Omega$  на зони обслуговування їх  $N$  виробниками, тобто на підмножини  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , і розмістити цих виробників в  $\Omega$  так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції

і доставку її до споживачів:

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\Omega_i} c(x, \tau_i) \rho(x) dx + \varphi_i \left( \int_{\Omega_i} \rho(x) dx \right) \right\} \quad (13)$$

за умов (11), (12).

У більшості практичних задач вартість виробництва продукції на промисловому підприємстві потужності  $Y_i$  дорівнює добутку собівартості цієї продукції на її кількість. В силу цього маємо:

$$\varphi_i(Y_i) = d_i + a_i Y_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Підставляючи вираз (14) в (13) отримаємо

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c(x, \tau_i) + a_i) \rho(x) dx. \quad (15)$$

Задача (11)-(15) при  $a_i = 0, i = 1, \dots, N$ , є нескінченновимірною транспортною задачею. Фундатор теорії оптимального розбиття множин О.М. Кісельова отримала необхідні умови оптимальності для задачі (11)-(15) та розробила метод і алгоритм її розв'язання [7].

Основні результати математичної теорії неперервних задач ОРМ  $n$ -вимірному евклідовому простору, які є некласичними задачами нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними, розробленої протягом останніх п'ятдесяти років О.М. Кісельовою та її учнями, викладені в більш ніж 400 наукових працях, серед яких шість монографій. Структуру сформованої до теперішнього часу теорії оптимального розбиття множин можна знайти в [6]. Створена теорія ґрунтується на єдиному підході, що полягає у зведенні видних нескінченновимірних задач оптимізації (зазвичай, через функціонал Лагранжа) до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, для чисельного розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційованої оптимізації – різні варіанти  $r$ -алгоритму, розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора [8]. Теорія оптимального розбиття множин ефективно застосовується для розв'язання широкого спектру різних за своєю природою теоретичних і практичних класів оптимізаційних задач, які зводяться в математичній постановці до неперервних моделей оптимального розбиття множин.

Наведемо математичну постановку лінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин за обмежень у формі рівностей та нерівностей з відшукуванням координат центрів підмножин. Необхідно відзначити, що ця задача є узагальненням задачі (11), (12), (15) на випадок, коли кожний  $i$ -й виробник з координатою  $\tau_i, i = 1, \dots, N$ , виробляє продукцію декількох видів.

*Задача 4 (лінійна багатопродуктова задача оптимального розбиття множини  $\Omega$  з  $n$ -вимірною евклідовим простору  $E_n$  на її підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються, з відшукуванням координат центрів*

$\tau_1, \dots, \tau_N$  цих підмножин, за обмежень у формі рівностей та нерівностей).  
Знайти

$$\min_{(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\})} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^j} (c^j(x, \tau_i) + a_i^j \rho^j(x)) dx$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N;$$

$$\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_i^j, \dots, \Omega_N^M\} \in \Sigma_{\Omega}^{NM}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N \in \Omega^N,$$

де  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega$ ;  $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \dots, \tau_i^{(n)}) \in \Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $a_1^1, \dots, a_N^M$ ;  $b_1, \dots, b_N$  – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x) dx \leq \sum_{i=1}^N b_i; \quad 0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N.$$

Окремими випадками задачі 4 є задача оптимального розбиття множини як із заданими координатами центрів підмножин, так і з невідомими заздалегідь; як без обмежень, так і з обмеженнями. Класичним прикладом таких задач є задача розміщення підприємств з одночасним розбиттям території на області, що обслуговуються одним підприємством. В даній задачі, як правило, критерієм якості розміщення і розбиття виступають сумарні витрати на виробництво і доставку продукції до споживача. У випадку, коли кожне підприємство виробляє декілька видів продукції, отримуємо багатопродуктову задачу оптимального розбиття множин.

**Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розміщення-розбиття із заданими центрами підмножин у множині, яка підлягає розбиттю.** Зазначена задача, з одного боку, узагальнює класичну скінченновимірну транспортну задачу 1 на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшуковуються як розв’язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами, а з іншого боку, вона узагальнює дискретну двоетапну виробничо-транспортну задачу 2 на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

Прикладні задачі, що зводяться до двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу характеризуються наявністю двох етапів і полягають у визначенні зон збору неперервно розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу і обсягів перевезень переробленого продукту від підприємств першого етапу до споживачів (пунктів другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти переробки (збору, зберігання) до споживачів. Такі задачі часто зустрічаються на практиці: роль неперервно-розподіленого ресурсу в них може відігравати, наприклад, природна сировина (нафта, газ, руда) або урожай сільськогосподарських культур; задачі з організації збору

деревних відходів для виробництва палива з подальшим розподілом їх між пунктами виробництва теплової енергії з метою мінімізації сумарних транспортних витрат; задачі оптимізації депозитно-кредитної діяльності відділень банку з метою залучення депозитів від фізичних осіб з подальшим розподілом залучених коштів між позичальниками та ін. [1].

Нехай  $\Omega$  – обмежена, замкнена, вимірنا за Лебегом множина в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $E_n$ . Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини  $\Omega$  на підмножини  $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ , що не перетинаються, через  $\Sigma_\Omega^N$ , тобто

$$\Sigma_\Omega^N = \{ \{ \Omega_1, \dots, \Omega_N \} : \bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \text{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i, j = 1, \dots, N (i \neq j) \}.$$

*Задача 5 (двоетапна неперервно-дискретна лінійна однопродуктова задача оптимального розміщення-розбиття із заданим розташуванням центрів підмножин, за обмежень у формі рівностей).* Знайти таке розбиття множини  $\Omega$  на  $N$  вимірних за Лебегом підмножин  $\Omega_{*1}, \dots, \Omega_{*N}$  і такий невід'ємний вектор  $v_* = (v_{*11}, \dots, v_{*NM}) \in E_{NM}$ , які забезпечують

$$\min_{(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\})} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}),$$

$$F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij} \quad (16)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^M v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^N v_{ij} = b_j^{II}, \quad j = 1, \dots, M;$$

$$\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_\Omega^N; \quad v_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, M;$$

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in \Omega; \quad \tau^I = (\tau_1^I, \dots, \tau_N^I) \in \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_N = \Omega^N, \quad \tau^{II} = (\tau_1^{II}, \dots, \tau_M^{II}) \in \Omega^M.$$

Тут  $b_j^{II}$ ,  $j = 1, \dots, M$ , – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови

$$S = \int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M v_{ij} = \sum_{j=1}^M b_j^{II}; \quad 0 \leq b_j^{II} \leq S, \quad j = 1, \dots, M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор  $v = (v_{11}, \dots, v_{NM})$  має сенс обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу  $\tau_i^I$ ,  $i = 1, \dots, N$ , до пунктів  $\tau_j^{II}$ ,  $j = 1, \dots, M$ , кінцевого споживання (другого етапу). Функції  $c_i^I(x, \tau_i^I)$  – визначені на  $\Omega \times \Omega$ , дійсні, обмежені, вимірні за аргументом  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$  при будь-якому фіксованому  $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$  з  $\Omega$  для усіх  $i = 1, \dots, N$ ; функція  $\rho(x)$  – дійсна, обмежена, вимірна, невід'ємна на  $\Omega$ ;  $\tau_i^I = (\tau_i^{I(1)}, \dots, \tau_i^{I(n)})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , – деяка задана еталонна точка для підмножини  $\Omega_i$ , звана центром цієї підмножини;  $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II(1)}, \dots, \tau_j^{II(n)})$ ,  $j = 1, \dots, M$ , – деяка задана точка множини  $\Omega$ ;  $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;  $j = 1, \dots, M$ , – визначена

на  $\Omega \times \Omega$  обмежена функція «відстані» у відповідній метриці між точками  $\tau_i^I$  і  $\tau_j^II$ .

У роботі [9] розроблено та обґрунтовано метод та алгоритм розв'язання задачі 5. Доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу із заданим положенням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей.

**Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі.** Розглянемо у цільовому функціоналі задачі 5 такі функції  $c_i^I(x, \tau_i^I)$ ,  $i=1, \dots, N$ , що задають відстань між точками  $x$  і  $\tau_i^I$  для I-го етапу і визначаються як одна з метрик [7]:

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} - \text{евклідова}; \quad (17)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{k=1}^n |x^{(k)} - \tau_i^{(k)}| - \text{манхеттенська}; \quad (18)$$

$$c(x, \tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{1 \leq k \leq n} |x^{(k)} - \tau_i^{(k)}| - \text{Чебишова}, \quad (19)$$

і такі функції  $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, M$ , що задають відстань між точками  $\tau_i^I$  і  $\tau_j^{II}$  для II-го етапу і визначаються аналогічно функціям відстані I-го етапу.

Для практичних задач відстані між споживачами і підприємствами I-го етапу, а також відстані між підприємствами I-го та II-го етапів можуть істотно відрізнятися від відстаней, що розраховуються за допомогою «формальних» метрик (17)-(19). Ці відмінності можуть бути задані нечітко за допомогою множника – вектора нечітких параметрів  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N)$  для кожної функції  $c_i^I(x, \tau_i^I)$ ,  $i=1, \dots, N$  та вектора нечітких параметрів  $\tilde{w} = (\tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{NM})$  для кожної функції  $c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ ,  $i=1, \dots, N$ ;  $j=1, \dots, M$ . Тоді функціонал (16) набуває вигляду

$$\begin{aligned} F(\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}, \{v_{11}, \dots, v_{NM}\}, \tilde{a}, \tilde{w}) = \\ = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \tilde{a}_i c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \tilde{w}_{ij} c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}, \end{aligned} \quad (20)$$

де параметри  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N)$  і  $\tilde{w} = (\tilde{w}_{11}, \dots, \tilde{w}_{NM})$  можна розглядати як лінгвістичні змінні, які, в свою чергу, можуть залежати від впливаючих на них факторів [10].

У роботі [11] запропоновано метод розв'язання сформульованої задачі, який базується на використанні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень тих параметрів задачі, які задані нечітко, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

**Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу з нейролінгвістичною ідентифікацією функцій, що входять до цільового функціоналу, явний аналітичний вигляд яких невідомий.** Відмітимо, що в математичній постановці задачі 3 та в різних узагальненнях цієї задачі [12] в цільовий функціонал входять функції  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , і  $\rho(x)$ , які, наприклад, в термінах нескінченновимірних транспортних задач і задач розміщення мають наступний зміст:  $c(x, \tau_i)$  – вартість транспортування одиниці продукції з пунктів виробництва  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , в пункт споживання з координатою  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $\rho(x)$  – функція попиту споживача  $x$  на продукцію, що виробляється пунктом виробництва  $\tau_i$ .

В задачах 4 і 5 припускалося, що для функцій  $c(x, \tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , та  $\rho(x)$  відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна і нелінійна) невідома. Крім того, часто неможливо врахувати в явному аналітичному вигляді вплив деяких реальних факторів або через брак інформації про модельовану залежність, або складності обліку різноманіття чинників, що впливають на характер цієї залежності. Для нескінченновимірної транспортної задачі, наприклад, на попит  $\rho(x)$  можуть впливати такі чинники, як зміна рівня доходу споживача, коливання валютного курсу або нестабільність політичної обстановки, коливання цін на бензин та багато інших. У випадках, коли такі залежності мають не ймовірнісний, а нечітко-множинний характер пропонується застосовувати нейронечіткі технології для ідентифікації залежності функції  $\rho(x)$  від її аргументів [13].

У роботі [14] розроблено та обґрунтовано метод ідентифікації залежності функції  $\rho(x)$ , що входить до цільового функціоналу задач 4, 5, від її аргументів із застосуванням нейронечіткої технології.

**Висновки.** У роботі розглянуто математичні моделі двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розміщення-розбиття та зазначені підходи до їх розв'язання. Загальна схема відшукування розв'язків двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу заснована на єдиному підході, який полягає у зведенні вихідних нескінченновимірних задач оптимального розбиття-розподілу до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, до чисельного розв'язання яких застосовуються ефективні методи недиференційованої оптимізації – різні варіанти  $r$ -алгоритму Шора. Метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткістю в цільовому функціоналі базується на тому принципі, що спочатку для відновлення точних значень нечітких параметрів у цільовому функціоналі застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації, а потім оптимальне розбиття знаходиться за допомогою методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

### Бібліографічні посилання

1. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. М.: Наука., 1986. 264 с.
2. Стецюк П.І., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки*. 2018. Т. 1. С. 14–20.
3. Taha H.A. Operations Research: An Introduction. 10th edition. Global Edition. Pearson Education Ltd., 2017. 848 p.
4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.
5. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. *ДАН СССР*. 1957. 115(6). С. 1058-1061.
6. Киселева Е.М. Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств  $n$ -мерного евклидова пространства. Теоретические и практические приложения. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 5. С. 114-135.
7. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. К.: Наукова думка, 2005. 564 с.
8. Shor N.Z. Minimization methods for non-differentiable functions. Springer series, Computational mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1985. Vol. 3. 162 p.
9. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Us S.A. Solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with a given position of the subsets centers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. 56(1). Pp. 3-15.
10. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with the subsets centers placement. *Open Computer Science*. De Gruyter, 2020. Vol 10. Pp. 124-136.
11. Кісельова О.М., Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 106-116.
12. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Analysis of algorithms for a class of continuous partition problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994. 30(1). Pp. 64-74.
13. Кісельова О.М., Гарт Л.Л., Притоманова О.М., Балейко Н.В. Нечіткі задачі оптимального розбиття множин: теоретичні основи, алгоритми, застосування: монографія. Дніпро: Ліра, 2020. 400 с.
14. Kiseleva E., Prytomanova O., Zhuravel S. Algorithm for solving a continuous problem of optimal partitioning with neurolinguistic identification of functions in target functional. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. 50(3). Pp. 1-20.

Надійшла до редколегії 05.07.2022.

**Л.Л. Гарт**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПРОЄКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЯВНИХ ДВОШАРОВИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ**

Для розв'язування некоректних лінійних операторних рівнянь у гільбертовому просторі, для яких не виконується третя умова коректності задачі за Адамаром (стійкість), теоретично обґрунтовано проєкційно-ітераційні методи регуляризації, основані на явних двошарових ітераційних методах у випадку проєктування у простори, ізоморфні підпросторам основного простору. Доведено теореми про збіжність проєкційно-ітераційних методів, отримано оцінки похибки. Надано рекомендації стосовно вибору регуляризуючої кількості ітерацій.

**Ключові слова:** некоректне операторне рівняння, регуляризація, явний двошаровий ітераційний метод, проєкційно-ітераційний процес, послідовність, збіжність.

**L.L. Hart**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **PROJECTION-ITERATION IMPLEMENTATION OF EXPLICIT TWO-LAYER ITERATIVE METHODS FOR SOLVING ILL-POSED OPERATOR EQUATIONS**

The theory of ill-posed problems and methods for their approximate solution is an actively developing branch of mathematics, which has various applications in many areas of natural science, engineering and control. Ill-posed problems arise in the process of mathematical modeling in geophysics, astrophysics, computed tomography, processing and interpretation of data from physical experiments. The intensive development of the theory of ill-posed problems is largely due to the emergence of high-performance computing systems in recent decades. As a rule, such problems are formulated using operator equations of the first kind, problems of minimizing functionals, and also problems of calculating eigenvalues of unbounded operators. Since measurements and experiments often serve as sources of initial data in practice, the resulting operator equations are usually specified with some error.

In this paper, we propose a projection-iteration implementation of explicit two-layer iterative methods (in particular, the methods of simple iteration, steepest descent, and minimal residuals) for solving ill-posed linear operator equations in a Hilbert space that do not satisfy the third Hadamard well-posedness condition (stability condition). The approach under consideration consists in replacing the original ill-posed operator equation with a sequence of simpler equations approximating it, given in Hilbert spaces isomorphic to subspaces of the original space. Then several approximations are constructed for each of the "approximate" equations using an explicit two-layer iterative method, and the last one is taken as the initial approximation in the iterative process for the next "approximate" equation through a special projection technique.



Theorems on the stability and convergence of projection and projection-iteration methods are presented, estimates of the error of approximate solutions are obtained for the case of projection into finite-dimensional Hilbert spaces isomorphic to subspaces of the main space. Recommendations are given for choosing a regularizing number of iterations in iterative processes for approximating equations. It is possible to specify the rate of convergence of projection-iteration methods in solving unstable linear operator equations under certain a priori restrictions on the exact solution of the problem (for example, by requiring a certain degree of its smoothness).

**Keywords:** ill-posed operator equation, regularization, explicit two-layer iterative method, projection-iteration process, sequence, convergence.

**Л.Л. Гарт**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ЯВНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Для решения некорректных линейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, для которых не выполняется третье условие корректности задачи по Адамару (устойчивость), теоретически обоснованы проекционно-итерационные методы регуляризации, основанные на явных двухслойных итерационных методах в случае проектирования в пространства, изоморфные подпространствам основного пространства. Доказаны теоремы о сходимости проекционно-итерационных методов, получены оценки погрешности. Даны рекомендации по выбору регуляризирующего числа итераций.

**Ключевые слова:** некорректное операторное уравнение, регуляризация, явный двухслойный итерационный метод, проекционно-итерационный процесс, последовательность, сходимость.

**Вступ.** Теорія некоректних задач і методів їх наближеного розв'язання – напрям математики, що активно розвивається та має різноманітні застосування у багатьох областях природознавства, техніки і керування. Некоректно поставлені задачі природним чином виникають у процесі математичного моделювання в геофізиці, астрофізиці, комп'ютерній томографії, при обробці й інтерпретації даних фізичних експериментів (див., наприклад [1–4]). Інтенсивний розвиток теорії некоректних задач багато в чому обумовлений появою в останні десятиліття високопродуктивних обчислювальних систем. Як правило, такі задачі формулюються у вигляді операторних рівнянь, задач мінімізації функціоналів, а також задач обчислення значень необмежених операторів. Оскільки джерелом вихідних даних на практиці часто служать виміри й експерименти, оператори отримуваних рівнянь зазвичай задаються з тією або іншою похибкою.

Значна частина некоректних задач може бути подана у вигляді операторного рівняння першого роду

$$A u = f \tag{1}$$

із заданими оператором  $A$ , що діє з  $X$  в  $Y$  ( $X, Y$  – метричні простори, в окремих випадках банахові або гільбертові), і елементом  $f \in Y$ .

Методи розв'язання некоректних задач отримали інтенсивний розвиток у 60-х роках ХХ століття на основі математичної теорії, створеної науковою школою академіка А.М. Тихонова. Дотепер розроблений широкий спектр різних підходів до розв'язання некоректно поставлених задач, найбільш загальним з яких є підхід, заснований на введеному А.М. Тихоновим понятті регуляризатора. Використання регуляризатора задачі дає можливість скільки завгодно точного її розв'язання за досить точних вихідних даних. Крім того, можна виділити метод заміни М.М. Лаврентьєва, метод підбору й квазірозв'язку В.К. Іванова; методи ітеративної, статистичної, локальної, дискриптивної регуляризації, субоптимальної фільтрації, розв'язання на компактї та ін. Серед закордонних розробок найбільш відомі методи оптимальної фільтрації Калмана-Б'юсі та Вінера, методи керованої лінійної фільтрації Бейкуса-Гільберта та ін. [5–7].

Особливе місце серед методів розв'язання некоректних задач посідають ітераційні методи: роль параметра регуляризації в них відіграє кількість ітерацій. У роботах [8, 9] були запропоновані перші методи наближень, що у границі дають точні розв'язки рівняння (1), для випадку точно заданих вихідних даних (оператора  $A$  і правої частини  $f$ ); в [10] було обґрунтовано збіжність методу послідовних наближень за наближеної правої частини  $f$  для лінійних рівнянь і розповсюджено результати на випадок нелінійних рівнянь. Різні схеми ітераційних методів, запропоновані К.Р. Вогелем, Г.М. Вайнікко, В. Ліпфертом, А.С. Апарциним, М.М. Лаврентьєвим, А.Б. Бакушинським та А.В. Гончарським, В.К. Івановим, В.В. Васінім, В.А. Морозовим, та іншими вченими, застосовувалися для розв'язування багатьох некоректних задач у банахових і гільбертових просторах. Метод простої ітерації та методи варіаційного типу для розв'язування некоректних рівнянь із наближеними даними вивчалися в роботах [11, 12]. Більшість перелічених робіт була присвячена апріорному вибору кількості ітерацій  $k$ , тобто оцінка похибки ітераційного методу будувалася у припущенні про представимість точного розв'язку рівняння (1) у вигляді  $u^* = A^s z$  ( $z \in X$ ,  $s > 0$ ) із подальшою оптимізацією оцінки за параметром  $k$ . Апостеріорний же вибір регуляризуючої кількості ітерацій (із використанням правил останову за нев'язкою або за поправкою) вперше був запропонований для методу простої ітерації в [13] та надалі отримав розвиток у роботах [14–17].

Крім ітераційних методів, для наближеного розв'язання операторних рівнянь широко застосовують також проєкційні методи, які дозволяють (за Л.В. Канторовичем [18]) рівняння (1), що розглядається в деякому складному просторі, замінити наближеним рівнянням, заданим у більш простому просторі, і прийняти точний розв'язок наближеного рівняння за наближення до розв'язку вихідного рівняння. Встановленню критеріїв збіжності, дослідженню швидкості збіжності, отриманню оцінок похибки, вивченню стійкості об-

числювальних схем і різним застосуванням проєкційних методів присвячені фундаментальні роботи С.Г. Міхліна, Л.В. Канторовича, Н.І. Польського, Г.М. Вайнікко, В.В. Петрішина, Ф. Браудера, В.В. Іванова, а також роботи Б.Г. Габдулхаєва, А.Ю. Лучки, С.Д. Балашової та інших авторів [19–22]. При цьому залучення ідей функціонального аналізу дало можливість виробити єдиний підхід до розв'язання найрізноманітніших задач, оскільки різні конкретні види рівнянь є окремими випадками деякого операторного рівняння, а також теоретично обґрунтувати досліджувані методи.

Незважаючи на широку сферу застосування, як проєкційні, так й ітераційні методи мають свої недоліки. Оскільки ітераційні методи, незважаючи на показникову швидкість збіжності та прості обчислювальні схеми, мають обмежену область застосування, а проєкційні методи, маючи широку область застосування, характеризуються степеневою швидкістю збіжності (іноді досить повільною) та обчислювальною нестійкістю, то ефективний синтез проєкційних та ітераційних методів, зумовлений потребою усунення властивих їм недоліків, теоретичне обґрунтування й аналіз відповідних чисельних алгоритмів утворюють важливий напрям у розвитку сучасної теорії алгоритмів та обчислень. Різноманітні змішані підходи до розв'язання операторних рівнянь представлені у працях Г. Ермана, Г.М. Вайнікко, В.В. Петрішина, Х. Гаєвського, Р. Ключе, В.В. Іванова, В.П. Танани, А.Б. Бакушинського, А.Ю. Лучки, М.Д. Бабича, Я.Д. П'янило, Т. Чена, М. Седдека, а також у роботах Б.Г. Габдулхаєва, С.Д. Балашової, Ю.Д. Федоренка, Е.Л. Гарт та інших авторів. Короткий огляд відповідних наукових джерел можна знайти, наприклад, в [22]. Там же проведено дослідження методів із назвою *проєкційно-ітераційні*, для розв'язування операторних рівнянь першого роду, засновані на наступній ідеї. Рівняння виду (1) з лінійним оператором  $A$ , що діє у гільбертовому просторі  $H$ , апроксимується послідовністю наближених рівнянь

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

де  $A_n$  – лінійний обмежений оператор, діючий у скінченновимірному підпросторі  $H_n$  вихідного простору ( $H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_n \subset \dots \subset H$ ,  $H_1 \neq \emptyset$ );  $f_n = P_n f$ ,  $P_n$  – оператор проєктування  $H$  на  $H_n$  ( $P_n^2 = P_n$ ,  $\|P_n\| = 1$ ). До розв'язання рівнянь (2) застосовується деякий ітераційний метод, причому для кожного з наближених рівнянь знаходиться за вказаним методом лише декілька наближень  $u_n^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, k_n$ ), останнє з яких покладається рівним початковому наближенню в ітераційному процесі для наступного,  $(n+1)$ -го наближеного рівняння. За послідовність наближень до розв'язку рівняння (1) розглядається послідовність  $\{u_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ . У роботах [23, 24] за допомогою описаного підходу отримані теоретично обґрунтовані проєкційно-ітераційні методи розв'язування некоректного лінійного операторного рівняння (1) у гільбертовому просторі, засновані на явних двошарових ітераційних методах простої ітерації, мінімальних нев'язок та найшвидшого спуску.

У даній роботі розглядається випадок, коли наближені рівняння (2), що апроксимують (1), задаються не в підпросторах  $H_n \subset H$ , а в деяких гільбертових просторах  $\tilde{H}_n$ , ізоморфних до них (саме цей випадок найчастіше зустрічається під час розв'язання практичних задач).

**Постановка задачі.** Нехай задано рівняння (1)

$$Au = f,$$

де  $A$  – лінійний обмежений самоспряжений і додатний оператор, який діє в дійсному гільбертовому просторі  $H$  зі скалярним добутком  $(u, v)$  довільних елементів  $u, v \in H$  і породжуваною ним нормою  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ ,  $u \in H$ . Припустимо, що обернений оператор  $A^{-1}$  існує, але не є обмеженим в  $H$ , тобто для рівняння (1) не виконується третя умова коректності задачі за Адамаром (стійкість) [2]. Некоректність рівняння в цьому випадку пов'язана з тим, що власні значення  $\lambda_m$ ,  $m=1, 2, \dots$  оператора  $A$ , впорядковані за спаданням ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \dots > 0$ ), прямують до нуля при  $m \rightarrow \infty$ , що призводить до погані його обумовленості. Будемо позначати через  $u^* \in H$  точний розв'язок рівняння (1).

Відмітимо, що якщо в рівнянні (1) оператор  $A$  не є самоспряженим і додатним, то можна провести попередню симетризацію за Гаусом і розглядати замість рівняння (1) еквівалентне йому симетризоване рівняння  $A^*Au = A^*f$  з додатним (а значить, самоспряженим) в  $H$  лінійним оператором  $A^*A$ , де  $A^*$  – спряжений оператор по відношенню до  $A$ .

Метою даної роботи є теоретичне обґрунтування проєкційно-ітераційного підходу до розв'язання некоректних лінійних операторних рівнянь виду (1) у гільбертовому просторі для випадку проєктування у простори, ізоморфні підпросторам основного простору, а саме отримання достатніх умов збіжності, оцінок похибки та швидкості збіжності проєкційно-ітераційної реалізації явних двошарових ітераційних методів (простої ітерації, мінімальних нев'язок та найшвидшого спуску).

**Проєкційний метод.** Поряд із рівнянням (1) розглянемо послідовність наближених рівнянь

$$\tilde{A}_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_n, \quad n=1, 2, \dots, \quad (3)$$

де  $\tilde{A}_n$  – лінійний обмежений оператор, що діє у скінченновимірному дійсному гільбертовому просторі  $\tilde{H}_n$ , ізоморфному підпростору  $H_n \subset H$ , зі скалярним добутком  $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{\tilde{H}_n}$  для будь-яких  $\tilde{u}_n, \tilde{v}_n \in \tilde{H}_n$  і нормою елемента  $\|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n} = \sqrt{(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n)_{\tilde{H}_n}}$ .

Позначимо через  $\Phi_n$  лінійний оператор, що ставить у взаємно однозначну відповідність кожному елементу  $u_n \in H_n$  елемент  $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ ;  $\Phi_n^{-1}$  – оператор, що здійснює оборотне відображення. Введемо також оператор  $\bar{\Phi}_n$ , що є роз-

ширенням  $\Phi_n$  на весь простір  $H$ . У ролі  $\bar{\Phi}_n$  може виступати, наприклад, оператор  $\bar{\Phi}_n = \Phi_n P_n$ , де  $P_n$  – оператор ортогонального проектування  $H$  на  $H_n$  ( $P_n^2 = P_n$ ,  $P_n^* = P_n$ ,  $\|P_n\| = 1$ ). Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що простори  $\tilde{H}_n$  і  $H_n$  ізометричні, тобто

$$(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{\tilde{H}_n} = (u_n, v_n)_H, \quad \|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n} = \|u_n\|_H, \quad n=1, 2, \dots, \quad (4)$$

для всіх  $u_n, v_n \in H_n$  і  $\tilde{u}_n = \Phi_n u_n$ ,  $\tilde{v}_n = \Phi_n v_n$ , звідки випливає, що  $\|\Phi_n\| = \|\Phi_n^{-1}\| = 1$ . (При вказаному виборі оператора  $\bar{\Phi}_n$  виконується також умова  $\|\bar{\Phi}_n\| = 1$ .) В іншому випадку в просторах  $\tilde{H}_n$  можна ввести нову метрику, що забезпечуватиме зазначену ізометричність [19]:

$$[\tilde{u}_n, \tilde{v}_n]_{\tilde{H}_n} = ((\Phi_n^{-1})^* \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n, \tilde{v}_n)_{\tilde{H}_n}, \quad |\tilde{u}_n|_{\tilde{H}_n} = \sqrt{((\Phi_n^{-1})^* \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n, \tilde{u}_n)_{\tilde{H}_n}}.$$

Якщо до того ж оператори  $\Phi_n$  і  $\Phi_n^{-1}$  рівномірно по  $n$  обмежені, тобто

$$\|\Phi_n\| \leq C', \quad \|\Phi_n^{-1}\| \leq C'', \quad n=1, 2, \dots,$$

де  $C' > 0$ ,  $C'' > 0$ , то нова норма  $|\tilde{u}_n|_{\tilde{H}_n}$  еквівалентна старій  $\|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n}$ , оскільки

$$(C')^{-1} \|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n} \leq |\tilde{u}_n|_{\tilde{H}_n} \leq C'' \|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n}, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{H}_n.$$

Зауважимо, що, якщо  $\tilde{f}_n = \bar{\Phi}_n f$ , то від рівняння (3) легко перейти до рівняння (2), заданого у підпросторі  $H_n \subset H$ , і навпаки, при цьому  $A_n = \Phi_n^{-1} \tilde{A}_n \Phi_n$ ,  $f_n = \Phi_n^{-1} \tilde{f}_n$ . Звідси випливає еквівалентність рівнянь (3) і (2) у тому сенсі, що розв'язуваність одного з них зумовлює розв'язуваність іншого та їх розв'язки (у випадку існування) пов'язані між собою співвідношеннями  $\tilde{u}_n^* = \Phi_n u_n^*$ ,  $u_n^* = \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^*$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

Припустимо, що при кожному  $n \in \mathbb{N}$  виконуються умови близькості

$$\|\tilde{A}_n \tilde{u}_n - \bar{\Phi}_n A \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\alpha}_n \|\tilde{u}_n\|_{\tilde{H}_n}, \quad \forall \tilde{u}_n \in \tilde{H}_n; \quad (5)$$

$$\|A u - \Phi_n^{-1} \bar{\Phi}_n A u\|_H \leq \tilde{\beta}_n \|u\|_H, \quad \forall u \in H; \quad (6)$$

$$\|\Phi_n^{-1} \bar{\Phi}_n f - f\|_H \leq \tilde{\eta}_n \|f\|_H, \quad \forall f \in H, \quad (7)$$

де  $\tilde{\alpha}_n$ ,  $\tilde{\beta}_n$ ,  $\tilde{\eta}_n$  – додатні числа, які не залежать від  $\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n$ ,  $u \in H$  і  $f \in H$  відповідно, причому  $\tilde{\alpha}_n \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\beta}_n \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\eta}_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Здійсненність та збіжність проєкційного методу розв'язання рівняння (1) обґрунтовується з використанням методології [20] шляхом переходу від основних просторів  $H$  і  $\tilde{H}_n$  до фактор-просторів цих просторів по підпросторах нулів  $\text{Ker } A = \{u \in H : A u = 0\}$  і  $\text{Ker } \tilde{A}_n = \{\tilde{u}_n \in \tilde{H}_n : \tilde{A}_n \tilde{u}_n = 0\}$  точного і наближеного операторів  $A$  і  $\tilde{A}_n$  відповідно, а також до операторів  $\bar{A} : H \rightarrow H$  і  $\bar{\tilde{A}}_n : \tilde{H}_n \rightarrow \tilde{H}_n$ , індукованих основними операторами  $A$  і  $\tilde{A}_n$  в фактор-просторах  $\bar{H} = H \setminus \text{Ker } A$  і  $\bar{\tilde{H}}_n = \tilde{H}_n \setminus \text{Ker } \tilde{A}_n$  відповідно [18].

**Теорема 1** (про збіжність проєкційного методу) [22]. Нехай рівняння (1) розв'язуване за будь-якої правої частини  $f \in H$  і виконані умови (4)-(7). Тоді для  $n \geq N$ , що задовольняють нерівність  $\tilde{p}_n \equiv \|\bar{A}^{-1}\|(\tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n) < 1$ , наближені рівняння (3) розв'язувані за будь-якої правої частини  $\tilde{f}_n \in \tilde{H}_n$ , причому існують такі точні розв'язки  $u^* \in H$  і  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{H}_n$  рівнянь (1) і (3) відповідно, що послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^*\}_{n=N}^\infty$  збігається в  $H$  до  $u^*$  з оцінкою похибки

$$\|\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^* - u^*\|_H \leq \tilde{\gamma}_n, \quad n \geq N,$$

де  $\tilde{\gamma}_n = 2\|\bar{A}^{-1}\| \left( (\tilde{\alpha}_n + \tilde{\beta}_n) \|\tilde{u}_n^*\|_{\tilde{H}_n} + \tilde{\eta}_n \|f\|_H \right)$ . Самі ж розв'язки  $\tilde{u}_n^*$  рівнянь (3) близькі в  $\tilde{H}_n$  до відповідних елементів  $\bar{\Phi}_n u^*$  в тому сенсі, що

$$\|\tilde{u}_n^* - \bar{\Phi}_n u^*\|_{\tilde{H}_n} = O(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\eta}_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

У багатьох прикладних дослідженнях типовою є ситуація, коли вихідні дані задаються з похибкою. Цю ситуацію промодельюємо припущенням, що права частина рівняння (1) задана з похибкою  $\delta > 0$ , тобто замість  $f \in H$  нам відомо  $f_\delta \in H$  таке, що

$$\|f - f_\delta\|_H \leq \delta. \quad (8)$$

(У більш загальному випадку слід орієнтуватися на задачі (1), в яких наближено задана не тільки права частина  $f$ , а й оператор задачі  $A$ .) Потрібно за  $f_\delta \in H$  побудувати наближений розв'язок  $u_\delta \in H$  рівняння (1), який задовольняє умову  $u_\delta \rightarrow u^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Для наближеного розв'язування задачі (1) за умови (8) апроксимуємо рівняння  $Au = f_\delta$  за тією ж схемою, що і вище, послідовністю наближених рівнянь

$$\tilde{A}_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_{\delta,n}, \quad n \geq N, \quad (9)$$

де  $\tilde{f}_{\delta,n} = \bar{\Phi}_n f_\delta$ . З визначення оператора  $\bar{\Phi}_n = \Phi_n P_n$  випливає, що відхилення правих частин відповідних наближених рівнянь (3) і (9) в сенсі норми простору  $\tilde{H}_n$  не перевищує похибки  $\delta$  завдання правої частини рівняння (1):

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{\delta,n}\|_{\tilde{H}_n} = \|\bar{\Phi}_n f - \bar{\Phi}_n f_\delta\|_{\tilde{H}_n} \leq \|\Phi_n\| \|P_n\| \|f - f_\delta\|_H \leq \delta, \quad n \geq N.$$

Стійкість розглядуваного варіанту проєкційного методу розв'язання задачі (1) за умови (8) встановлює наступна теорема.

**Теорема 2** (про стійкість проєкційного методу) [22]. Нехай виконані всі умови теореми 1. Тоді існують такі точні розв'язки  $u^* \in H$  рівняння (1) за умови (8) і  $\tilde{u}_{\delta,n}^* \in \tilde{H}_n$  рівнянь (9), що послідовність  $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_{\delta,n}^*\}_{n=N}^\infty$  збігається в  $H$  до  $u^*$ , якщо  $\delta \rightarrow 0$ , з оцінкою похибки

$$\|\Phi_n^{-1}\tilde{u}_{\delta,n}^* - u^*\|_H \leq \tilde{\sigma}_{\delta,n}, \quad n \geq N,$$

де  $\tilde{\sigma}_{\delta,n} = 2\|\bar{A}^{-1}\|\delta(1-\tilde{p}_n)^{-1} + \tilde{\gamma}_n$ ;  $\tilde{p}_n$  і  $\tilde{\gamma}_n$  визначені в теоремі 1. Самі ж розв'язки  $\tilde{u}_{\delta,n}^*$  рівнянь (9) близькі в  $\tilde{H}_n$  до відповідних елементів  $\bar{\Phi}_n u^*$  в тому сенсі, що  $\|\tilde{u}_{\delta,n}^* - \bar{\Phi}_n u^*\|_{\tilde{H}_n} = O(\tilde{\sigma}_{\delta,n} + \tilde{\eta}_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

**Проекційно-ітераційний метод.** Розглянемо питання про застосування ітераційних методів до розв'язання наближених рівнянь (9).

Зазначимо, що з додатності вихідного оператора  $A$  в  $H$  та здійсненості умов ізометричності (4) й умов близькості (5), (6) впливає додатність в  $\tilde{H}_n$  кожного з наближених операторів  $\tilde{A}_n$ , починаючи з деякого  $n = N_0 \geq 1$  [22]. Крім того, з виконуваності умов (5), (6) впливає, що для кожного власного значення  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) оператора  $A$  існує послідовність  $\{\lambda_{m,n}\}_{n=N_0}^\infty$  власних значень операторів  $\tilde{A}_n$  така, що  $\lambda_{m,n} \rightarrow \lambda_m$  при  $n \rightarrow \infty$ , і навпаки, кожна гранична точка будь-якої послідовності власних значень операторів  $\tilde{A}_n$  є власним значенням оператора  $A$ . При цьому, якщо  $\tilde{A}_n = \bar{\Phi}_n A \Phi_n^{-1}$ , то  $\lambda_m \leq \lambda_{m,n}$  і  $\lambda_{m,n+1} \leq \lambda_{m,n}$  для всіх номерів  $m \geq 1$  і  $n \geq N_0$  [13]. Таким чином, за зроблених припущень про оператор  $A$  вихідної задачі зрозуміло, що власні значення  $\lambda_{j,n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \ell_n$  ( $\ell_n = \dim \tilde{H}_n$ ) операторів  $\tilde{A}_n$ , впорядковані за спаданням ( $\lambda_{1,n} \geq \lambda_{2,n} \geq \dots \geq \lambda_{\ell_n,n} > 0$ ,  $n \geq N_0$ ), прямують до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , що зумовлює малу стійкість відповідних наближених рівнянь (3) та (9).

Для розв'язування кожного з операторних рівнянь (9) будемо застосовувати явний двошаровий ітераційний метод Річардсона [25]

$$\tilde{u}_{\delta,n}^{(k+1)} = \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{\tau}_n^{(k+1)}(\tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{f}_{\delta,n}), \quad k = 0, 1, \dots; \quad \tilde{u}_{\delta,n}^{(0)} \in \tilde{H}_n, \quad n \geq N, \quad (10)$$

де  $\tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} \in \tilde{H}_n$  –  $k$ -те ітераційне наближення до розв'язку  $\tilde{u}_{\delta,n}^*$  рівняння (9);  $\tilde{\tau}_n^{(k+1)} > 0$  – ітераційний параметр. Побудувавши для  $n$ -го наближеного рівняння за допомогою формули (10) кілька наближень  $\tilde{u}_{\delta,n}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_n$  і використавши останнє з них для початкового наближення в ітераційному процесі для  $(n+1)$ -го наближеного рівняння (9), отримаємо послідовність  $\{\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}\}_{n=N}^\infty$  проекційно-ітераційного методу, що визначається за формулами

$$\tilde{u}_{\delta,n}^{(k+1)} = \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{\tau}_n^{(k+1)}(\tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{f}_{\delta,n}), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1; \quad (11)$$

$$\tilde{u}_{\delta,n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}, \quad n \geq N; \quad \tilde{u}_{\delta,N}^{(0)} \in \tilde{H}_N.$$

Відомо [25], що для методу Річардсона (10) з додатним оператором  $\tilde{A}_n$  існує спосіб вибору оптимальних (чебишовських) ітераційних параметрів, однак через близькість до нуля нижньої границі спектру оператора  $\tilde{A}_n$  складно конкретизувати швидкість збіжності такого методу в  $\tilde{H}_n$ , а також вказати ап-

ріорне число ітерацій  $k(\delta)$ , узгоджене із заданим рівнем похибки правої частини в (9) (оцінка  $\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_{\delta,n}\|_{\tilde{H}_n} \leq \delta$ ).

Будемо вимагати, щоб ітераційний процес (10) був монотонним, тобто

$$\|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k+1)} - \tilde{u}_{\delta,n}^*\|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{q}_n \|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{u}_{\delta,n}^*\|_{\tilde{H}_n}, \quad k=0,1,\dots; \quad 0 < \tilde{q}_n < 1, \quad n \geq N, \quad (12)$$

де  $\tilde{u}_{\delta,n}^* \in \tilde{H}_n$  – точний розв’язок рівняння (9).

Достатні умови збіжності проєкційно-ітераційного методу (11), заснованого на явному двошаровому ітераційному методі Річардсона, для розв’язування задачі (1) з лінійним обмеженим самоспряженим і додатним оператором  $A$  в гільбертовому просторі  $H$  за умови (8) встановлює наступна теорема.

**Теорема 3** (про збіжність проєкційно-ітераційного методу). *Нехай виконані всі умови теореми 1 і умова (12). Якщо кількість ітерацій у проєкційно-ітераційному методі (11) для кожного  $n \geq N$  задовольняє нерівність  $k_n \leq k(\delta)$ , причому  $k(\delta) \cdot \delta \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , то послідовність наближень  $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}\}_{n=N}^\infty$ , що визначається за формулами (11), збігається в  $H$  до розв’язку  $u^*$  задачі (1), (8), якщо  $\delta \rightarrow 0$ , і справедлива оцінка похибки*

$$\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - u^*\|_H \leq \tilde{\mu}_{\delta,n} + \tilde{\gamma}_n, \quad n \geq N, \quad (13)$$

де  $\tilde{\mu}_{\delta,n} = \|\tilde{z}_N^{(0)}\|_{\tilde{H}_N} \tilde{\mu}'_n + \tilde{\mu}''_n + \delta \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \tilde{q}_n^{k_n-i}$ ,  $\tilde{z}_N^{(0)} = \tilde{u}_{\delta,N}^{(0)} - \tilde{u}_N^*$ ,  $\tilde{\mu}'_n = \prod_{j=N}^n \tilde{q}_j^{k_j}$ ,

$\tilde{\mu}''_n = \sum_{m=N+1}^n \left( \delta \cdot \sum_{i=1}^{k_m} \tilde{\tau}_m^{(i)} \tilde{q}_m^{k_m-i} + \tilde{\gamma}_{m-1} + \gamma_m \right) \cdot \prod_{j=m}^n \tilde{q}_j^{k_j}$ ,  $0 < \tilde{q}_j < 1$ ;  $\tilde{\gamma}_n$  дається в теоремі 1.

Крім того, для кожного  $n \geq N$  елементи  $\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}$  і  $\bar{\Phi}_n u^*$  близькі в  $\tilde{H}_n$  у тому сенсі, що  $\|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \bar{\Phi}_n u^*\|_{\tilde{H}_n} = O(\tilde{\mu}_{\delta,n} + \tilde{\gamma}_n + \tilde{\eta}_n) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

**Д о в е д е н н я.** Розглянемо для довільного фіксованого номера  $n \geq N$  очевидну нерівність

$$\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - u^*\|_H \leq \|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^*\|_H + \|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_n^* - u^*\|_H,$$

де  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{H}_n$  – точний розв’язок наближеного рівняння (3). Оцінка другого доданку відома з теореми 1, отже

$$\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - u^*\|_H \leq \|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \tilde{u}_n^*\|_{\tilde{H}_n} + \tilde{\gamma}_n. \quad (14)$$

Для оцінювання першого доданку, з формули (10) безпосередньо отримаємо:

$$\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} = \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{u}_{\delta,n}^{(0)} + \left( \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n+i-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{f}_{\delta,n},$$

де  $\tilde{u}_{\delta,n}^{(0)} \in \tilde{H}_n$  – початкове наближення;  $\tilde{E}_n$  – тотожний оператор в  $\tilde{H}_n$ . Для точного розв’язку  $\tilde{u}_n^* \in \tilde{H}_n$  скористаємося аналогічним співвідношенням



$$\tilde{u}_n^* = \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{u}_n^* + \left( \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n+i-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{f}_n,$$

яке відповідає ітераційному розв'язанню рівняння (3), коли початкове наближення збігається з його точним розв'язком. Таким чином, для похибки  $\tilde{z}_n^{(k_n)} = \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \tilde{u}_n^*$  ітераційного методу (10) на  $k_n$ -й ітерації отримуємо вираз

$$\tilde{z}_n^{(k_n)} = \tilde{v}_n^{(k_n)} + \tilde{w}_n^{(k_n)}, \quad (15)$$

$$\text{де } \tilde{v}_n^{(k_n)} = \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{z}_n^{(0)}, \quad \tilde{w}_n^{(k_n)} = \left( \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n+i-j)} \tilde{A}_n) \right) (\tilde{f}_{\delta,n} - \tilde{f}_n);$$

$\tilde{z}_n^{(0)} = \tilde{u}_{\delta,n}^{(0)} - \tilde{u}_n^*$  – початкова похибка в  $\tilde{H}_n$ . Перший доданок в (15) стандартний для проєкційно-ітераційних методів, другий же пов'язаний з урахуванням похибки в завданні правої частини (2).

Позначимо через  $\tilde{T}_n^{(k)} = \tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k)} \tilde{A}_n$  самоспряжений в  $\tilde{H}_n$  оператор переходу від ітерації до ітерації в методі (10). З умови монотонності (12) випливає, що оператори  $\tilde{T}_n^{(k)}$  рівномірно по  $k$  обмежені, тобто

$$\|\tilde{T}_n^{(k)}\| = \|\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k)} \tilde{A}_n\| \leq \tilde{q}_n < 1, \quad k=1,2,\dots, k_n. \quad (16)$$

На підставі цієї оцінки для елемента  $\tilde{w}_n^{(k_n)}$  у формулі (15) матимемо

$$\|\tilde{w}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} \leq \|\tilde{f}_{\delta,n} - \tilde{f}_n\|_{\tilde{H}_n} \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \prod_{j=i}^{k_n-1} \|\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n+i-j)} \tilde{A}_n\| \leq \delta \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \tilde{q}_n^{k_n-i}. \quad (17)$$

Далі, оскільки початкова похибка ітераційного методу для рівняння (3) з урахуванням (11) може бути подана у вигляді  $\tilde{z}_n^{(0)} = \Phi_n \Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{\delta,n-1}^{(k_{n-1})} - \tilde{u}_n^*$ , то

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_n^{(0)}\|_{\tilde{H}_n} &= \|\Phi_n \Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{\delta,n-1}^{(k_{n-1})} - \Phi_n u_n^*\|_{\tilde{H}_n} = \|\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{\delta,n-1}^{(k_{n-1})} - u_n^*\|_H \leq \\ &\leq \|\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{\delta,n-1}^{(k_{n-1})} - \Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^*\|_H + \|\Phi_{n-1}^{-1} \tilde{u}_{n-1}^* - u_n^*\|_H + \|u_n^* - u_{n-1}^*\|_H \leq \\ &\leq \|\tilde{z}_{n-1}^{(k_{n-1})}\|_{\tilde{H}_{n-1}} + \tilde{\gamma}_{n-1} + \gamma_n, \end{aligned} \quad (18)$$

де  $\gamma_n > 0$  – величина, що характеризує похибку розв'язку  $u_n^*$  відповідного наближеного рівняння (2) у підпросторі  $H_n \subset H$ :  $\|u_n^* - u_{n-1}^*\|_H \leq \gamma_n$  [23], і для елемента  $\tilde{v}_n^{(k_n)}$  на підставі (15)–(18) будемо мати рекурсивний вираз

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} &\leq \|\tilde{z}_n^{(0)}\|_{\tilde{H}_n} \cdot \prod_{j=0}^{k_n-1} \|\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \tilde{A}_n\| \leq \left( \|\tilde{z}_{n-1}^{(k_{n-1})}\|_{\tilde{H}_{n-1}} + \tilde{\gamma}_{n-1} + \gamma_n \right) \cdot \tilde{q}_n^{k_n} \leq \\ &\leq \left( \|\tilde{v}_{n-1}^{(k_{n-1})}\|_{\tilde{H}_{n-1}} + \|\tilde{w}_{n-1}^{(k_{n-1})}\|_{\tilde{H}_{n-1}} + \tilde{\gamma}_{n-1} + \gamma_n \right) \cdot \tilde{q}_n^{k_n} \leq \\ &\leq \left( \|\tilde{v}_{n-1}^{(k_{n-1})}\|_{\tilde{H}_{n-1}} + \delta \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} \tilde{q}_n^{k_n-i} + \tilde{\gamma}_{n-1} + \gamma_n \right) \cdot \tilde{q}_n^{k_n}, \quad n > N. \end{aligned}$$

Користуючись цим виразом, отримаємо:

$$\|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} \leq \|\tilde{v}_N^{(k_N)}\|_{\tilde{H}_N} \cdot \prod_{j=N+1}^n \tilde{q}_j^{k_j} + \sum_{m=N+1}^n \left( \delta \cdot \sum_{i=1}^{k_m} \tilde{\tau}_m^{(i)} \tilde{q}_m^{k_m-i} + \tilde{\gamma}_{m-1} + \gamma_m \right) \cdot \prod_{j=m}^n \tilde{q}_j^{k_j},$$

а оскільки  $\|\tilde{v}_N^{(k_N)}\|_{\tilde{H}_N} \leq \|\tilde{z}_N^{(0)}\|_{\tilde{H}_N} \cdot \prod_{j=0}^{k_N-1} \|\tilde{E}_N - \tilde{\tau}_N^{(k_N-j)} \tilde{A}_N\| \leq \|\tilde{z}_N^{(0)}\|_{\tilde{H}_N} \cdot \tilde{q}_N^{k_N}$ , то остаточно для  $\tilde{v}_n^{(k_n)}$  буде справедлива така оцінка:

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} &\leq \|\tilde{z}_N^{(0)}\|_{\tilde{H}_N} \cdot \prod_{j=N}^n \tilde{q}_j^{k_j} + \sum_{m=N+1}^n \left( \delta \cdot \sum_{i=1}^{k_m} \tilde{\tau}_m^{(i)} \tilde{q}_m^{k_m-i} + \tilde{\gamma}_{m-1} + \gamma_m \right) \cdot \prod_{j=m}^n \tilde{q}_j^{k_j} = \\ &= \|\tilde{z}_N^{(0)}\|_{\tilde{H}_N} \tilde{\mu}'_n + \tilde{\mu}''_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Отже з урахуванням (15), (17), (19) для всіх номерів  $n \geq N$  отримуємо

$$\|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \tilde{u}_n^*\|_{\tilde{H}_n} \leq \|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} + \|\tilde{w}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} \leq \tilde{\mu}_{\delta,n}. \quad (20)$$

Підставляючи це співвідношення в (14), приходимо до оцінки похибки (13). З оцінки (13) видно, що  $\|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - u^*\|_H \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

Далі, використовуючи (13) і (7), для будь-якого  $n \geq N$  матимемо:

$$\|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \Phi_n u^*\|_{\tilde{H}_n} = \|\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \Phi_n^{-1} \Phi_n u^*\|_H \leq \tilde{\mu}_{\delta,n} + \tilde{\gamma}_n + \tilde{\eta}_n \|u^*\|_H,$$

звідки випливає, що  $\|\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - \Phi_n u^*\|_{\tilde{H}_n} \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Теорема доведена. ■

**Аналіз отриманих результатів.** Зауважимо, що із загального проєкційно-ітераційного методу явного типу (11) для розв'язання задачі (1) за умови (8) можна отримати як окремі випадки проєкційно-ітераційні варіанти методів:

– простої ітерації (за  $\tilde{\tau}_n^{(k+1)} \equiv \tau_n$ ,  $0 < \tau_n < 2/\lambda_{1,n}$ );

– мінімальних нев'язок (за  $\tilde{\tau}_n^{(k+1)} = (\tilde{A}_n \tilde{r}_{\delta,n}^{(k)}, \tilde{r}_{\delta,n}^{(k)})_{\tilde{H}_n} / \|\tilde{A}_n \tilde{r}_{\delta,n}^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2$ , де

$$\tilde{r}_{\delta,n}^{(k)} = \tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{f}_{\delta,n};$$

– найшвидшого спуску (за  $\tilde{\tau}_n^{(k+1)} = \|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k)}\|_{\tilde{H}_n}^2 / (\tilde{A}_n \tilde{r}_{\delta,n}^{(k)}, \tilde{r}_{\delta,n}^{(k)})_{\tilde{H}_n}$ ),

однойменні варіанти яких на елементах підпросторів  $H_n \subset H$  були розглянуті у роботах [23, 24]. Кожен із зазначених ітераційних процесів є монотонним в  $\tilde{H}_n$  з  $\tilde{q}_n = \|\tilde{E}_n - \tau_n \tilde{A}_n\| < 1$ ,  $\tau_n \in (0, 2/\lambda_{1,n})$  в умові (12). Якщо до того ж виконується співвідношення (4), то параметри ітераційних процесів у відповідних просторах  $H_n$  і  $\tilde{H}_n$  збігаються ( $\tilde{\tau}_n^{(k+1)} \equiv \tau_n^{(k+1)}$ ,  $k=0,1,\dots,k_n-1$ ,  $n \geq N$ ) і вони стають повністю еквівалентними.

Стосовно швидкості збіжності проєкційно-ітераційних методів типу (11) за умови (12) зауважимо, що методи мінімальних нев'язок і найшвидшого спуску при розв'язанні стійких рівнянь збігаються з тією ж швидкістю, що і метод простої ітерації з оптимальним параметром  $\tau_n = 2/(\lambda_{1,n} + \lambda_{\ell_n,n})$  [11]. Під час

розв'язування ж нестійких рівнянь (9), коли відношення  $\lambda_{1,n} / \lambda_{\ell_n,n}$  велике, ці методи збігаються досить повільно. Проекційно-ітераційний підхід, як вже зазначалося в [22–24], дозволяє прискорити збіжність процесу наближень до розв'язку вихідної задачі (1), (8) за рахунок доцільного використання регуляризованих властивостей застосовуваних ітераційних алгоритмів. Крім того, прискорити збіжність ітераційних методів під час розв'язування наближених рівнянь (9) можна за рахунок застосування неявних ітераційних процесів, в тому числі зі змінними ітераційним параметрами.

Як впливає з доведення теореми 3 про збіжність проекційно-ітераційного методу явного типу для розв'язання задачі (1) за умови (8), збіжність в  $H$  послідовності наближень  $\{\Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}\}_{n=N}^{\infty}$  до точного розв'язку  $u^*$ , а також зближення в  $\tilde{H}_n$  елементів  $\tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}$  і  $\bar{\Phi}_n u^*$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  мають місце при довільному виборі чисел  $k_n$ , зокрема, всі числа  $k_n$  можуть бути рівними 1. Однак зі зростанням  $n$  збільшується обсяг обчислювальної роботи, необхідної для побудови чергового наближення, тому постає питання про доцільний вибір чисел  $k_n$  ( $n \geq N$ ), відповіді на яке в загальному випадку складно, проте можуть бути надані деякі рекомендації.

Один із способів вибору чисел  $k_n$  можна описати, виходячи з оцінок похибки. Скористаємось для визначеності оцінкою похибки (13) загального проекційно-ітераційного методу явного типу (11). Ця оцінка за кожного  $n \geq N$  має декілька складових (див. (14), (17), (20)):

$$\left\| \Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} - u^* \right\|_H \leq \left\| \tilde{v}_n^{(k_n)} \right\|_{\tilde{H}_n} + \delta \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)} + \tilde{\gamma}_n, \quad n \geq N, \quad (21)$$

звідки видно, що у випадку застосування проекційно-ітераційного методу (11) в ролі параметра регуляризації виступає число ітерацій  $k_n$ , яке слід узгоджувати як із похибкою  $\delta$  в завданні правої частини  $f \in H$ , так і з похибкою  $\tilde{\gamma}_n$  проекційного методу. Бистроту спадання в  $\tilde{H}_n$  першого доданку в (21) можна оцінити з наступних міркувань. Припускаючи систему  $\{\tilde{\varphi}_{j,n}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \ell_n$  власних функцій оператора  $\tilde{A}_n$  ортонормованою в  $\tilde{H}_n$ , запишемо розкладання елемента  $\tilde{v}_n^{(k_n)}$ , визначеного в (15), по власних функціях оператора  $\tilde{A}_n$ , а також відповідну рівність Парсеваля [18]:

$$\tilde{v}_n^{(k_n)} = \sum_{j=1}^{\ell_n} \tilde{c}_{j,n} \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \tilde{A}_n) \right) \tilde{\varphi}_{j,n} = \sum_{j=1}^{\ell_n} \tilde{c}_{j,n} \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (I - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \lambda_{j,n}) \right) \tilde{\varphi}_{j,n};$$

$$\left\| \tilde{v}_n^{(k_n)} \right\|_{\tilde{H}_n}^2 = \sum_{j=1}^{\ell_n} \tilde{c}_{j,n}^2 \left( \prod_{j=0}^{k_n-1} (I - \tilde{\tau}_n^{(k_n-j)} \lambda_{j,n}) \right)^2, \quad n \geq N,$$

де  $\tilde{c}_{j,n} = (\tilde{z}_n^{(0)}, \tilde{\varphi}_{j,n})_{\tilde{H}_n}$  – коефіцієнти Фур’є елемента  $\tilde{z}_n^{(0)} = \tilde{u}_{\delta,n}^{(0)} - \tilde{u}_n^* \in \tilde{H}_n$ . Оскільки  $|1 - \tilde{\tau}_n^{(k)} \lambda_{j,n}| \leq \|\tilde{E}_n - \tilde{\tau}_n^{(k)} \tilde{A}_n\| \leq \tilde{q}_n < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, k_n$  (див. 18), то з рівності

Парсеваля випливає, що  $\|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n}^2 \leq \tilde{q}_n^{2k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \tilde{c}_{j,n}^2$ , тобто  $\|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} = O(\tilde{q}_n^{k_n}) \rightarrow 0$ ,

$k_n \rightarrow \infty$ . Таким чином, перший доданок у правій частині (21) прямує до нуля при  $k_n \rightarrow \infty$ , другий зростає з числом ітерацій, третій же не залежить від  $k_n$ .

Ясно, що число  $k_n$  достатньо вибрати таким, щоб величини  $\|\tilde{v}_n^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n}$ ,  $\delta \sum_{i=1}^{k_n} \tilde{\tau}_n^{(i)}$  і  $\tilde{\gamma}_n$  мали однаковий порядок малості; зокрема, роль  $k_n$  може відігравати найменше з чисел  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), що задовольняють нерівність

$$\left( \tilde{q}_n^k + \delta \sum_{i=1}^k \tilde{\tau}_n^{(i)} \right) \leq C \tilde{\gamma}_n, \quad n \geq N, \quad (22)$$

де  $C > 0$  – деяка константа. Слід зазначити, що способом (22) зручно користуватися лише у випадку, коли використовувані в ньому величини легко обчислити, що не завжди має місце при розв’язанні практичних задач.

Інший спосіб вибору чисел  $k_n$  ( $n \geq N$ ), аналогічно з розглянутим в [23], полягає у виборі  $k_n$  таким чином, щоб елемент  $\Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} \in \tilde{H}_{n+1}$  був гарним початковим наближенням для  $(n+1)$ -го наближеного рівняння (9), іншими словами, щоб нев’язка  $\tilde{r}_{\delta,n+1}^{(0)} = \tilde{A}_{n+1} \tilde{u}_{\delta,n+1}^{(0)} - \tilde{f}_{\delta,n+1}$  набувала по можливості мале значення. Розглянемо для будь-якого  $n \geq N$  оцінку

$$\begin{aligned} \|\tilde{r}_{\delta,n+1}^{(0)}\|_{\tilde{H}_{n+1}} &= \|\tilde{r}_{\delta,n+1}^{(0)} + \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} (\tilde{r}_{\delta,n}^{(k_n)} - \tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)} + \tilde{f}_{\delta,n})\|_{\tilde{H}_{n+1}} \leq \|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} + \\ &+ \|\tilde{A}_{n+1} \tilde{u}_{\delta,n+1}^{(0)} - \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_{n+1}} + \|\Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{f}_{\delta,n} - \tilde{f}_{\delta,n+1}\|_{\tilde{H}_{n+1}} = \|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} + \tilde{\theta}_{\delta,n}. \end{aligned}$$

Оскільки завдяки умові (12)  $\|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n} \rightarrow 0$  при  $k_n \rightarrow \infty$ , то порядок  $\|\tilde{r}_{\delta,n+1}^{(0)}\|_{\tilde{H}_{n+1}}$

при даному  $n$  визначається величиною  $\tilde{\theta}_{\delta,n}$ . Тому число  $k_n$  достатньо вибрати таким, щоб величини  $\|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k_n)}\|_{\tilde{H}_n}$  і  $\tilde{\theta}_{\delta,n}$  мали однаковий порядок малості; зокрема, роль  $k_n$  може відігравати найменше з чисел  $k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), що задовольняють нерівність

$$\|\tilde{r}_{\delta,n}^{(k)}\|_{\tilde{H}_n} \leq C \tilde{\theta}_{\delta,n}, \quad n \geq N, \quad (23)$$

де  $C > 0$  – деяка константа.

Покладена в основу способу (23) ідея [19] дозволяє також визначати найбільш прийнятний номер  $n+m$ ,  $m \geq 1$  наближеного рівняння, наступного за  $n$ -м, у послідовності рівнянь (9). Для визначення  $m$  відшукується число  $k_n$  способом (23), з якого випливає, що  $\|\tilde{r}_{\delta,n+1}^{(0)}\|_{\tilde{H}_{n+1}} \leq (C+1) \tilde{\theta}_{\delta,n}$ . А оскільки серед

величин  $\|\tilde{r}_{\delta,n+j}^{(0)}\|_{\tilde{H}_{n+1}}$ ,  $\tilde{r}_{\delta,n+j}^{(0)} = \tilde{A}_{n+j}\tilde{u}_{\delta,n+j}^{(0)} - \tilde{f}_{\delta,n+j}$ ,  $j > 1$  можуть виявитися такі, що задовольняють аналогічну умову

$$\|\tilde{r}_{\delta,n+j}^{(0)}\|_{\tilde{H}_{n+1}} \leq (C+1)\tilde{\theta}_{\delta,n}, \quad n \geq N,$$

то за  $m$  доцільно обрати максимальний з номерів  $j \geq 1$ , для яких ця умова виконана. Деякі інші способи вибору чисел  $k_n$  ( $n \geq N$ ) в проєкційно-ітераційних методах розв'язання нестійких рівнянь, а також їх застосування під час розв'язання конкретних задач можна знайти у роботах [26–29].

**Висновки.** У роботі теоретично обґрунтовано проєкційно-ітераційні методи розв'язання некоректних лінійних операторних рівнянь у гільбертовому просторі, для яких не виконується третя умова коректності задачі за Адамаром, засновані на явних двошарових ітераційних процесах, зокрема на методі простої ітерації та методах варіаційної типу (найшвидшого спуску й мінімальних нев'язок). Наведено теореми про стійкість і збіжність проєкційних та проєкційно-ітераційних методів, отримано оцінки похибки у випадку проєктування у скінченновимірні гільбертові простори, ізоморфні до підпросторів основного простору. Надано рекомендації з вибору регуляризуючої кількості ітерацій в ітераційних процесах для апроксимуючих рівнянь. Конкретизувати швидкість збіжності проєкційно-ітераційних методів під час розв'язання нестійких лінійних операторних рівнянь можна за тих або інших апріорних обмежень на точний розв'язок задачі (наприклад, вимагаючи певного ступеня його гладкості [17]).

Окремого обговорення заслуговує проблема використання неявних ітераційних методів типу

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k+1)} &= \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{\tau}_n^{(k+1)} (\tilde{B}_n^{(k)})^{-1} (\tilde{A}_n \tilde{u}_{\delta,n}^{(k)} - \tilde{f}_{\delta,n}), \quad k=0,1,\dots,k_n-1; \\ \tilde{u}_{\delta,n+1}^{(0)} &= \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{u}_{\delta,n}^{(k_n)}, \quad n \geq N; \quad \tilde{u}_{\delta,N}^{(0)} \in \tilde{H}_N, \end{aligned}$$

в яких  $\tilde{B}_n^{(k)} \neq \tilde{E}_n$  ( $k=0,1,\dots,k_n-1$ ,  $n \geq N$ ), для розв'язання апроксимуючих рівнянь. У разі коректних операторних рівнянь вибір оператора  $\tilde{B}_n^{(k)}$  підпорядкований виключно прискоренню швидкості збіжності ітераційного методу. Під час розв'язання ж некоректних наближених рівнянь ітераційний процес за кожного  $n \geq N$  обривається до досягнення нев'язкою величини, узгодженої із похибкою вихідних даних та похибкою апроксимації. Тут важливо, не тільки з якою швидкістю збігається ітераційний процес на цій ділянці спадання, а й в якому класі гладкості цей ітераційний процес збігається, в якій нормі необхідний рівень нев'язки досягається. Найбільш важлива особливість наближеного розв'язання нестійких операторних рівнянь неявними ітераційними методами полягає в тому, що виділення наближеного розв'язку з необхідного класу гладкості може досягатися саме за рахунок вибору оператора  $\tilde{B}_n^{(k)}$ .

**Бібліографічні посилання**

15. Ramm A.G. Inverse problems: Mathematical and analytical techniques with applications to engineering. New York: Springer-Verlag, 2005. 442 p.
16. Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems: Theory and applications. Series 55. Berlin, Boston: De Gruyter GmbH, 2012. 459 p.
17. Caruso N.A., Michelangeli A. Inverse linear problems on Hilbert space and their Krylov solvability. Cham: Springer, 2021. 140 p.
18. Охріменко М.Г., Жуковська О.А., Купка О.О. Методи розв'язування некоректно поставлених задач. К.: "ЦУЛ", 2008. 166 с.
19. Казакова Н.Ф., Петров А.О. Моделі розв'язання задачі про відновлення інформації. *Збірник наукових праць Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. К.: ВІКНУ, 2012. Вип. 38. С. 186-192.
20. Bleyer I.R., Leitão A. Novel regularization methods for ill-posed problems in Hilbert and Banach spaces. Publisher: Publicações matemáticas do IMPA, 2015. 135 p.
21. Kinh, N. On the regularization method for solving ill-posed problems with unbounded operators. *Open Journal of Optimization*. 2022. № 11. Pp. 7-14. doi: 10.4236/ojop.2022.112002.
22. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926. 115 p.
23. Крылов В.И., Голузин Г.М. Обобщенная формула Carleman'a и приложение ее к аналитическому продолжению функций. *Математический сборник*. 1933. 40(2). С. 144–149.
24. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskiĭ S.P. Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1986. 290 p.
25. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
26. Константинова Я.В., Лисковец О.А. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений I-го рода. *Вестник Белорусского университета*. Сер. I. 1973. № 1. С. 9–15.
27. Krasnoselsky M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitsky Ya.B., Stetsenko V.Ya. Approximate solution of operator equations. Berlin: Akademie-Verlag, 1973. 409 p.
28. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 178 с.
29. He G.Q., Liu L.X. A kind of implicit iterative methods for ill-posed operator equations. *Journal of Computational Mathematics*. 1999. 17(3). Pp. 275-284.
30. Kilmer M.E., O'Leary D.P. Choosing regularization parameters in iterative methods for ill-posed problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2001. 22(4). Pp. 1204–1221. doi: 10.1137/S0895479899345960.
31. Матысик О.В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач. Брест: Изд-во БрГУ, 2014. 213 с.
32. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis, 2nd edition. Pergamon: Elsevier, 1982. 604 pp. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-03044-7>.
33. Балашова С.Д. Приближенные методы решения операторных уравнений. Днепропетровск: ДГУ, 1980. 112 с.
34. Габдулхаев Б.Г. Теория приближенных методов решения операторных уравнений. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 112 с.
35. Leitão A., Svaiter B.F. On a family of gradient type projection methods for nonlinear ill-posed problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*. 2018. 39(9). Pp. 1153-1180. doi: 10.1080/01630563.2018.1466331.
36. Гарт Л.Л. Проекційно-ітераційні методи розв'язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації. Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук, 01.05.01, МОН України. Дніпро: ДНУ, 2017. 293 с.

37. Гарт Л.Л. Явный проекционно-итерационный метод решения некорректных операторных уравнений. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Д.: РВВ ДНУ, 2015. Вип. 15. С. 33-47.
38. Гарт Л.Л. Проекционно-итерационная реализация явных методов вариационного типа для решения некорректных операторных уравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2017. № 1. С. 114-125. doi: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.1.09
39. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 788 pp. <https://doi.org/10.1201/9780203908518>.
40. Гарт Л.Л. Проекційно-ітераційний алгоритм розв'язання некорректних інтегральних рівнянь Вольтера. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2012. № 1. С. 101-112.
41. Гарт Л.Л., Манойло М.В. О некоторых алгоритмах регуляризации для решения интегральных уравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2015. № 1. С. 99-110.
42. Гарт Л.Л. Оптимізація обчислень в регуляризаційних алгоритмах розв'язання задачі відновлення розмитих зображень. *Перший незалежний науковий вісник*. К.: Фондація Економічних Ініціатив, 2015. № 1-1. С. 165-170.
43. Kiseleva E.M., Hart L.L., Dovgay P.A. On a problem of numerical simulating the derivative of discrete time series with approximate values. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. 47(10). Pp. 1-17. doi: 10.1615/JAutomatInfScien. v47.i12.10.

*Надійшла до редколегії 05.09.2022.*

**С.В. Диханов, Н.А. Гук**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **АНАЛІЗ ВМІСТУ ВЕБСТОРИНОК ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ЧАСТОТНОЇ МОДЕЛІ ТЕКСТУ**

Розглядається задача кластеризації сторінок вебсайту на основі аналізу їх текстів методом  $k$ -середніх. Для зображення тексту застосовано векторну модель та метрику TF-IDF. Для вилучення текстів застосовано структурний підхід до аналізу HTML документів на основі тегів. Результати кластеризації можуть бути застосовані для покращення логічної будови сайту та формулювання рекомендацій для реінжинірингу.

Ключові слова: вебсайт, векторна модель, метрика TF-IDF, кластеризація, метод  $k$ -середніх, реінжиніринг.

**S.V. Dykhanov, N.A. Guk**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **WEB PAGE CONTENT ANALYSIS USING A FREQUENCY TEXT MODEL**

The problem of automatic clustering of a collection of texts by topic has a wide practical application in various areas of natural language processing. Examples of such applications are recommender systems and intelligent assistants, determining user profiles in social networks, analyzing the emotional colouring of texts, clustering the abstracts of scientific articles and books, analyzing the semantic core of websites, and identifying artificial texts.

In this paper, we consider the problem of analyzing the texts of web pages. To represent web pages in the work, a vector model of text representation is used. We will use the TF-IDF metric to vectorize web page texts.

To reduce the dimension of the vector space, pre-processing was applied to the texts of the collection. The procedures of lemmatization and cleaning of texts by removing stop words were performed. To extract texts from web pages, we used a structural approach to parsing HTML documents based on tags. An automatic procedure for parsing a web page in order to extract text is considered as an automaton with a finite number of states. The movement and change of states of the automaton takes place taking into account the context of the page.

The clustering of documents in the collection was performed using the  $k$ -means method. To determine the number of clusters  $k$ , a threshold value is set, which is calculated as the ratio of the average distance between clusters to the average distance between documents within a cluster.

Computational experiments were carried out for the website of an online store. The clustering results obtained using the notion of graph modularity have been improved. The analysis of the quality of the resulting of clustering in relation to the expert partition was carried out using the accuracy and recall metrics. The results of clustering can be used to improve the logical structure of the site and formulate recommendations for reengineering.

Keywords: website, vector model, TF-IDF metric, clustering,  $k$ -means method, reengineering.



**С.В. Дыханов, Н.А. Гук**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **АНАЛИЗ СОДЕРЖАНИЯ ВЕБСТРАНИЦ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЧАСТОТНОЙ МОДЕЛИ ТЕКСТА**

Рассматривается задача кластеризации страниц вебсайта на основе анализа текстов страниц методом  $k$ -средних. Для представления текста используется векторная модель и метрика TF-IDF. Для извлечения текстов предлагается структурный подход к анализу HTML документов на основе тегов. Результаты кластеризации могут быть применены для улучшения логического строения сайта и формулировки рекомендаций по реинжинирингу.

Ключевые слова: вебсайт, векторная модель, метрика TF-IDF, кластеризация, метод  $k$ -средних, реинжиниринг.

**Вступ.** Задачі автоматичної кластеризації колекції текстів за тематикою мають широке практичне застосування у різних областях обробки природної мови. Яскравими прикладами таких застосувань є розробка рекомендаційних систем та інтелектуальних асистентів, задачі визначення профілів користувачів у соціальних мережах, задачі аналізу емоційного фарбування текстів, задачі кластеризації анотацій наукових статей та книжок, задачі аналізу семантичного ядра вебсайтів та визначення релевантності ключових слів пошуковим запитам, задачі ідентифікації штучних текстів.

Незважаючи на актуальність та широке практичне застосування задача кластеризації текстів досі викликає багато труднощів під час розв'язання.

В даній роботі розглядається задача аналізу текстів вебсторінок. Відомо, що для аналізу структури вебсайтів широко застосовуються методи кластеризації, за допомогою яких визначають групи схожих сторінок. В залежності від обраної цільової функції задачі кластеризації кластери можуть утворюватись сторінками, які мають значну кількість посилань одна на одну, сторінками, які є схожими за структурою та стилем оформлення, сторінками, які є затребуваними у певних груп користувачів. Однак, подальший аналіз вмісту визначених кластерів показує, що зазвичай в них знаходяться елементи, які у порівнянні з експертним розбиттям повинні належати до інших кластерів. Тому потребує розробки підхід щодо аналізу схожості вебсторінок всередині кластерів, який спирається на визначення їх близькості за певними ознаками. Враховуючи контентну орієнтацію вебсайтів саме аналіз текстів сторінок дозволить вдосконалити вміст кластеру та відокремити сторінки, які опинились у кластері випадково.

**Аналіз підходів до зображення та кластеризації текстів.** Підходи до аналізу текстів та визначенню їх близькості передбачають вибір моделі представлення тексту, вибір ознак, за якими буде здійснюватися порівняння, та вибір методу кластеризації.

До аналізу текстів можуть застосовуватись моделі та методи, які враховують семантику природних мов [1].

У роботі [2] розвиваються підходи по формуванню наборів семантично пов'язаних слів на основі концептів, за допомогою яких можливо розуміти сенс багатозначних слів по їх оточенню, визначати близькість текстів за відсутності

спільних слів, подолати проблему надлишковості. У [3] розглядається застосування контекстних векторів ознак. При застосуванні методу латентно-семантичного аналізу [4] використовується поняття контекстно-залежного змісту слів, передбачається, що між окремими словами та контекстом, у якому вони вживаються, існує зв'язок. Сукупність контекстів, у яких певне слово вживається, визначає подібність значень слів та множин слів, що у свою чергу дозволяє визначити асоціативну та семантичну близькість і враховувати кореляцію між термами та документами.

Однак застосування таких підходів передбачає витратні процедури побудови концептів онтології, семантичних фреймів для зображення речень тексту та семантичної мережі тексту, розробку процедур їх порівняння із застосуванням алгоритмів теорії графів [5], нейронних мереж глибокого навчання [6].

Більш простим у використанні та практичній реалізації є зображення текстів у вигляді частотних векторних моделей з подальшою їх кластеризацією шляхом обчислення мери близькості векторів у векторному просторі із застосуванням відповідних метрик. Використання векторного зображення текстів вимагає значно менших витрат, ніж врахування семантики мов, ручне складання баз знань або онтологій. В залежності від вигляду та розміру текстів можна застосовувати різні методи визначення ознак, широко вживаними є частотне зображення текстів на основі «bag of words» та «word embeddings» [7].

Векторна модель тексту на основі «bag of words» враховує лише частоту застосування слів у тексті або колекції текстів, при цьому не враховується порядок слів у тексті, граматичні та синтаксичні конструкції. Для кожного тексту будується вектор, який має вимірність словника. Для покращення якості моделі можуть застосовуватись методи редукції простору ознак, методи видалення шуму.

Модель «word embeddings» враховує контекстну близькість слів. Гіпотезою моделі враховується, що слова, які зустрічаються у тексті поряд з однаковими словами та, відповідно, мають однаковий сенс, у векторному зображенні повинні мати схожі вектори. Для визначення мери їх близькості застосовуються косинусна або евклідова відстань. Серед недоліків моделі можна зазначити складність отримання контекстних векторів для слів, що рідко зустрічаються у текстах колекції, неможливість врахування семантичної та синтаксичної неоднозначності понять, неможливість відображення ієрархічної природи мови.

Серед методів кластеризації, що застосуються для векторних моделей тексту, широко застосовуються як класичні методи – k-means, k-median, метод найближчого сусіда, так і нейромережеві та нейронечітки підходи.

Аналіз літературних джерел показав, що застосування частотної моделі тексту є прийнятним для колекцій, які складаються з невеликої кількості текстів та мають обмежений словник. Але додаткового дослідження потребують

особливості застосування зазначених моделей та методів до задач аналізу схожості текстів вебсторінок.

**Постановка задачі.** Розглядається задача автоматичного розподілення текстів вебсторінок з множини  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  на кластери з множини  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ ,  $C_i \subset C$ ,  $i = \overline{1, k} \forall i, j; i, j = \overline{1, k}; i \neq j: C_i \cap C_j = \emptyset$ . Для зображення текстів застосується векторне представлення у вигляді матриці  $M$  вимірності  $m \times n$ , де кожен  $i$ -ий рядок матриці  $m_i = \{m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{ik}\}$  складається з  $k$  ознак тексту. Необхідно знайти такий розподіл текстів по кластерах, щоб кожний кластер складався з близьких за метрикою векторів, а вектори, що належать до різних кластерів суттєво відрізнялись. Враховуючи особливості формування вебсторінок необхідно також розробити метод вилучення тексту з вебсторінки, обрати метод вилучення ознак тексту та метод кластеризації.

**Математична модель зображення тексту вебсторінки.** Для зображення текстів вебсторінок використовується векторна модель подання тексту (vector space model). Векторна модель дозволяє виконати зображення текстів у вигляді векторів у спільному для колекції текстів  $D$  векторному просторі.

Текст  $d \in D$  у векторній моделі розглядається як неупорядкована множина термів  $T$ . Під векторизацією тексту мається на увазі розбиття тексту на унікальні слова (словосполучення або  $n$ -грами) та подальше кодування. Вимірність вектору тексту дорівнює кількості різних термів у всій колекції текстів  $D$ , і є однаковою для кодування всіх документів.

Для векторизації текстів вебсторінок будемо застосовувати метрику TF-IDF:

$$M = tf(t, d) \times idf(t, D).$$

Частота входження терму  $t$  в документ  $d$  обчислюється у такий спосіб:

$$tf(t, d) = \frac{n_t}{\sum_k n_k},$$

де  $n_t$  – число входжень терму  $t$  в тексті  $d$ ,  $K$  – загальна кількість термів в тексті.

Інверсія частоти, з якою певний терм зустрічається у текстах колекції, обчислюється у такий спосіб:

$$idf(t, D) = \log \frac{|D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|},$$

де  $|D|$  – число текстів у колекції;  $|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$  число текстів з колекції  $D$ , в яких зустрічається терм  $t$ .

Для зменшення вимірності векторного простору до текстів колекції застосовано попередню обробку, яка складалась з виконання процедур лематизації та очищення текстів шляхом видалення «стоп-слів».

Лематизація зводить словоформи у тексті до нормальної форми. В українській мові нормальними формами вважаються наступні морфологічні зображення: для іменників – називний відмінок, однина; для прикметників – називний відмінок, однина, чоловічий рід; для дієслів, дієприкметників, дієприслівників – дієслово в інфінітиві недосконалого виду. До «стоп-слів» відносять слова, які часто зустрічаються у текстах колекції, але не несуть змістовного навантаження. У роботі застосовується словник «стоп-слів» та видаляються всі слова довжиною до трьох символів. Метрика TF-IDF обчислюється для нормалізованого тексту. За рахунок скорочення загального числа термів зменшується вимірність векторного простору.

**Особливості процесу вилучення тексту вебсторінки.** Особливістю задачі, що розглядається, є необхідність вилучення текстів з вебсторінок. Зазвичай вебдокументи в мережі Інтернет зображуються в форматі Hyper Text Markup Language 5 (HTML5) та містять не лише текст, а і іншу інформацію – CSS стилі, JavaScript код, елементи навігації та оформлення сторінок. На основі HTML сторінок браузер будує структурну модель сайту – Document Object Model (DOM). Зазначена модель є деревом, у вершинах якого зберігаються посилання та атрибути елемента, а нащадками такого елемента є вкладені в нього HTML-теги та тексти з інформацією (контентом).

Для вилучення текстів з вебсторінок у роботі застосовано структурний підхід до аналізу HTML документів на основі тегів. Передбачається, що у HTML-документах імена тегів та атрибутів є стандартизованими.

Автоматична процедура аналізу вебсторінки з метою вилучення тексту розглядається як автомат зі скінченою кількістю станів. Рух та зміна станів автомату відбувається з урахуванням контексту сторінки. В залежності від позиції на вебсторінці визначаються стани: з зовні тегу, в середині тегу, в середині коментаря, в середині JavaScript коду. Слід зазначити, що в середині JavaScript коду можуть також знаходитися HTML-теги, але вони не входять до структури побудованого DOM-дерева. Оскільки для аналізу необхідно вилучити лише текстові дані з вебсторінки, то було відокремлено назви елементів та їх нащадків, які не переглядаються та не належать до побудованої структури. До таких віднесено елементи стильового оформлення, посилання, елементи коментарів, сховані елементи та елементи, що розташуються за межами бачення браузера.

Шляхом переходів між станами та з врахуванням змісту стану з документу відокремлюється структурована інформація. На основі отриманих даних можливо побудувати ієрархію, яка відтворює структуру вкладення тегів у вигляді дерева об'єктів.

**Метод кластеризації.** Кластеризацію документів колекції виконано із застосуванням методу  $k$ -середніх. За допомогою цього методу відбувається розбиття множини елементів векторного простору на заздалегідь відоме число кластерів  $k$ . Неієрархічний метод  $k$ -середніх дозволяє отримати розподіл  $n$  елементів на  $k$  кластерів, так щоб кожний елемент з колекції текстів належав до окремого кластеру з найближчим до нього середнім зна-

ченням. Метод базується на мінімізації суми квадратів евклідових відстаней між кожним елементом з колекції текстів та центром його кластера, тобто функції:

$$\sum_{i=1}^N r(d_i, m_j(d_i))^2,$$

де  $r$  – метрика,  $d_i$  –  $i$ -ий документ колекції, а  $m_j(d_i)$  – центр кластера, якому на  $j$ -ій ітерації приписаний елемент  $d_i$ .

У процесі виконання алгоритму мінімізується середньоквадратична відстань на елементах кожного кластера. На кожній ітерації відбувається обчислення центру мас для кожного кластера, отриманого на попередньому кроці, потім вектори розбиваються на кластери знову відповідно до того, який з нових центрів виявився ближчим за обраною метрикою. Алгоритм завершується, коли на якийсь ітерації не відбувається зміни кластерів.

Наведемо опис алгоритму кластеризації методом  $k$ -середніх. Маємо масив векторних зображень текстів вигляді матриці, кожен рядок матриці відповідає певному тексту та має ряд ознак. Відповідно значень ознак об'єкт розташовується у багатовимірному просторі.

1. Визначається  $k$  – кількість кластерів, що необхідно утворити;
2. Обирається  $k$  об'єктів, метрики TF-IDF яких є віддаленими одна від одної. Обрані об'єкти вважаються центрами кластерів;
3. Кожний об'єкт привласнюється до одного з  $k$  кластерів – того, відстань до якого найкоротша;
4. Розраховується новий центр кожного кластера як елемент, ознаки якого розраховуються як середнє арифметичне ознак об'єктів, що входять у цей кластер;
5. Ітеративно повторюються кроки 3-4 алгоритму, поки центри кластерів не стануть стійкими (тобто при кожній ітерації в кожному кластері опиняться одні й ті самі об'єкти), дисперсія всередині кластера буде мінімізована, а між кластерами – максимізована.

Для визначення кількості кластерів  $k$  встановлюється значення порогу, яке розраховується як відношення середньої відстані між кластерами до середньої відстані між документами в середині кластеру. Тоді на кожній ітерації розподіл документів для поточної кількості кластерів буде розраховуватись до тих пір, поки відстань між поточною кількістю кластерів не стане нижче значення кластеризаційного порогу.

Для виконання програмної реалізації моделі представлення вебсторінок та алгоритму кластеризації було застосовано мову програмування Python та спеціалізовані бібліотеки. Для зображення векторної моделі представлення текстів з вебсторінок застосовано клас CountVectorizer з бібліотеки Scikit-learn. Для врахування вагомості слів у текстах використано процедуру TfidfVectorizer. Для виконання кластеризації попередньо оброблених текстів використовується клас KMeans з бібліотеки Scikit-learn.

**Аналіз результатів.** Для проведення обчислювальних експериментів було застосовано результати кластеризації, які попередньо було отримано та описано у роботі [8]. Наведений у роботі підхід до кластеризації текстових документів було застосовано для аналізу вмісту кластерів, які утворились для сайту інтернет-магазину <http://semena-dnepr.org.ua> із застосуванням поняття модулярності. Сайт інтернет-магазину має близько 500 унікальних вебсторінок, які шляхом кластеризації з використанням поняття модулярності було розподілено на 33 кластери.

Аналіз якості отриманого розбиття по відношенню до експертного розбиття здійснюється з використанням метрик точності та повноти [9] виявив суттєвий недолік алгоритму модулярності. Невеличкі кластери не відокремлювались, а привласнювались до більш великих кластерів.

У таблиці 1 наведено значення метрик якості розбиття для досліджуваного вебсайту. З аналізу таблиці можна бачити, що гірші значення точності спостерігаються для великих та маленьких кластерів.

Так до кластеру №1 належить близько 100 вебсторінок, за результатами перегляду їх вмісту виявилось, що частина з них належить до сторінок навігації сайту, сторінок сортування товарів за певними критеріями, сторінок із контактною інформацією та сторінок форуму із запитаннями, також до кластеру було віднесено окремі сторінки товарів, які за семантичними ознаками повинні були утворити окремі кластери.

Таблиця 1

## Значення метрик якості для розбиття із застосуванням поняття модулярності

Номер кластеру у розбитті	Кількість елементів у кластері	Значення точності у кластері	Значення повноти у кластері
1	103	0.58	0.62
5	16	0.87	0.91
10	10	0.81	0.76
18	5	0.67	0.63
31	12	0.83	0.86

Тому з метою вдосконалення вмісту вже утворених із застосуванням поняття модулярності кластерів було застосовано розроблений підхід щодо кластеризації текстів вебсторінок. В результаті було отримано розподіл 103 елементів з кластеру 1 попереднього розбиття [8] на 5 кластерів, результати наведено у табл. 2.

Середні значення точності та повноти по усім кластерам розбиття дорівнюють 0.938 та 0.912 відповідно.

Таким чином, із застосуванням запропонованого підходу вдосконалено вміст кластерів, усунуто недоліки попереднього розбиття із застосуванням поняття модулярності та отримано розв'язок, який має кращі показники якості (наближається до оптимального).

**Значення метрик якості для розбиття елементів 1-го кластеру з врахуванням вмісту тексту сторінок**

Номер кластеру у розбитті	Кількість елементів у кластері	Значення точності у кластері	Значення повноти у кластері	Семантичний опис кластеру
1	1	1	1	Головна сторінка сайту
2	4	0.97	0.93	Сторінки з контактною інформацією
3	35	0.86	0.79	Сторінки навігації сайтом
4	34	0.88	0.91	Сторінки сортування товарів
5	21	0.93	0.86	Сторінки форуму з публікаціями
6	3	1	1	Сторінки товарів з категорії «Кукурудза»
7	5	0.93	0.9	Сторінки товарів з категорії «Саджанці»

**Висновки.** Для зображення текстів вебсторінок використано векторну модель із врахуванням частоти вживаності слів у тексті, значення якої розраховується за допомогою метрики TF-IDF. Для вилучення текстів з вебсторінок у роботі розроблено структурний підхід до аналізу HTML документів на основі тегів.

Розроблено алгоритми кластеризації вебсторінок з врахуванням вмісту їх текстів методом k-середніх. Для оцінки якості розбиття використано метрики точності, повноти, які можна застосувати за наявності експертного розбиття сторінок вебресурсу на кластери.

Запропонований підхід застосовано для аналізу груп сторінок окремого вебсайту, розподіл яких по кластерам отримано з використанням поняття модулярності. Оцінено результат вдосконалення вмісту кластерів. Результати кластеризації можуть бути застосовані для покращення логічної будови сайту та формулювання рекомендацій для реінжинірингу.

### Бібліографічні посилання

1. Wang J., Peng J., Liu O. A classification approach for less popular webpages based on latent semantic analysis and rough set model. *Expert Systems with Applications*. 2015. Vol. 42, is 1. Pages 642-648.
2. Lakhzoum D., Izaute M, Ferrand L. Semantic similarity and associated abstractness norms for 630 French word pairs. *Behavior Research Methods*. 2021. 53. Pp. 1166–1178
3. Assylbekov Z., Takhanov R. Context Vectors are Reflections of Word Vectors in Half the Dimensions. *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2019. 66. Pp. 225-242.
4. Gefen D., Endicott J. E., Fresneda J. E., Miller J., Larsen K. R. (2017). A Guide to Text Analysis with Latent Semantic Analysis in R with Annotated Code: Studying Online Reviews and the Stack Exchange Community. *Communications of the Association for Information Systems*. 2017. Vol. 41. Pp 450-496
5. E. Castillo, O. Cervantes, D. Vilariño Text Analysis Using Different Graph-Based Representations. *Computacion y Sistemas*. 2018. 21(4). Pp. 581-599
6. Dubey, G., Sharma, P. (2022). A Neural Network Based Approach for Text-Level Sentiment Analysis Using Sentiment Lexicons. *Artificial Intelligence and Speech Technology. AIST 2021. Communications in Computer and Information Science*. 2022. vol 1546.
7. Peng Jin, Yue Zhang, Xingyuan Chen, and Yunqing Xia Bag-of-embeddings for text classification. *In Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'16)*. AAAI Press. 2016. Pp. 2824-2830.
8. Гук Н.А., Диханов С.В., Долотов І.О. Аналіз структури сайту з використанням поняття модулярності. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні наук*. 2020. Вип. 21. С. 99-114.
9. Olson D. L., Delen D. *Advanced Data Mining Techniques*. Springer, 2008. 180 p

Надійшла до редколегії 29.08.2022.



**Д.І. Єгошкін, Н.А. Гук**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ РЕДУКЦІЇ НЕЧІТКОЇ БАЗИ ПРАВИЛ НА ОСНОВІ ДАНИХ НАВЧАЛЬНОЇ ВИБІРКИ**

Розглядається процедура редукції нечіткої бази правил для розв'язання задачі мультикласової класифікації з використанням критерію якості. Пропонується адаптивний алгоритм редукції на основі методу дихотомії з динамічним кроком.

**Ключові слова:** штучний інтелект, експертна система, нечітка логіка, класифікація, база знань, редукція.

**D.I. Yehoshkin, N.A. Guk**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **ADAPTIVE FUZZY RULE BASE REDUCTION ALGORITHM BASED ON TRAINING DATA SET**

In this article, the reducing fuzzy rule base procedure is discussed for solving the problem of multiclass classification using the quality criterion. The paper proposes an adaptive reduction algorithm based on the dynamic step dichotomy method.

An actual problem of setting the number of rules in the knowledge base for solving the classification problem with multifactor dependency features and improving the reducing algorithm for the fuzzy expert system rule base is considered. Most of the modeling tasks of complex processes have multidimensional characteristics, and the amount of data being processed is potentially large, which leads to an increase in the rule number in the knowledge base of the expert system. Reduction methods are widely used, to reduce the number of rules. At the same time, for the resulting fuzzy system, the necessary condition of Pareto efficiency is needed. It is necessary to obtain the optimal ratio between the criteria of complexity (the number of terms for describing fuzzy variables, the number of rules) and the model accuracy.

The development of this area is relevant, since a large number of rules in the knowledge base makes it difficult to check the consistency of the base, and also significantly increases the time it takes to execute a logical conclusion. Also, the improvement of approaches and methods for the reduction of rules in knowledge bases in order to obtain stable results in classification problems is relevant. In this paper, we develop an approach to the reduction of the rule base, which was built using the Cartesian product on term sets of input variables. The production model of knowledge representation, which combines the Mamdani and Takagi-Sugeno-Kang models, is used to solve the classification problem.

The dichotomy method with a dynamic step has been developed to carry out the reduction algorithm. This method allows you to divide the set of rules into a reduced set of rules – the resulting set and the set of rules that are redundant and subject to reduction.

The proposed approach to building a fuzzy rule base for classifying objects was applied to the well-known multiclass classification problem Iris Flower Data Set – Fisher's Irises. As a result of the algorithm's operation, the rules were removed from the rule base, the antecedents of which were not activated, and among the remaining rules, the rules that had

the greatest impact on the classification result were selected. The influence of the training procedure parameters on classification accuracy is studied.

**Keywords:** artificial intelligence, expert system, fuzzy logic, classification, knowledge base, reduction.

**Д.И. Егошкин, Н.А. Гук**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РЕДУКЦИИ НЕЧЁТКОЙ БАЗЫ ПРАВИЛ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ**

Рассматривается процедура редукции нечёткой базы правил для решения задачи мультиклассовой классификации с использованием критерия качества. Предлагается адаптивный алгоритм редукции на основе метода дихотомии с динамическим шагом.

**Ключевые слова:** искусственный интеллект, экспертная система, нечеткая логика, классификация, база знаний, редукция.

**Вступ.** Сьогодні задачі, пов'язані з моделюванням процесів з багатофакторними зв'язками, зустрічаються у різних галузях людської діяльності. Для розв'язання таких задач застосовуються методи штучного інтелекту, що дозволяють знаходити приховані взаємозв'язки між наборами вхідних та вихідних параметрів. Відповідно до теореми FAT (Fuzzy Approximation Theorem) Б. Коско про нечітку апроксимацію [1] будь-яка, скільки завгодно складна математична залежність може бути апроксимована системою на основі нечіткої логіки. Застосування нечіткої логіки та нечітких баз знань в експертних системах дозволяє представляти залежності у вигляді нечітких правил "IF-THEN", зручних для обробки та аналізу експертом. Розробка систем на базі нечітких правил спрямована на покращення показників якості моделі, наприклад, на максимізацію точності у задачах класифікації або мінімізацію функції помилки у задачах прогнозування. Як правило, для побудови баз правил використовують два підходи: на основі досвіду експерта (групи експертів) або автоматичне формулювання бази правил. У більшості задач моделювання об'єкти мають багатовимірні характеристики, а кількість даних, що потрібно обробити потенційно велика. У цьому випадку другий підхід є більш продуктивним і, отже, актуальним. Однак у разі автоматичної генерації отримана база правил буде повною та може містити надлишкові правила. Для скорочення кількості правил використовуються методи редукції.

При цьому отримана нечітка система правил має бути ефективною за Парето, тобто необхідно забезпечити оптимальне співвідношення між критеріями складності (кількістю термів для опису нечітких змінних, кількістю правил) і точністю моделі. Такий підхід також покращить інтерпретованість бази правил. База правил, що побудована для змінних, визначених на невеликій кількості термів, і складена з такої кількості правил, що забезпечує необхідну точність моделі, дозволить легко налаштувати модель, а в процесі експлуатації дозволить скоротити обсяг необхідної пам'яті і час виконання логічного виводу.

**Огляд літературних джерел.** Задача редукції бази правил є актуальною і розглядається у низці робіт. Відомо, що велика кількість правил призводить до ускладнення перевірки бази знань на несуперечність, а також суттєво збільшує час виконання логічного виводу. Тому авторами низки робіт пропонуються підходи, що дозволяють скоротити кількість правил у системі.

Так у роботі [2] розглядається проблема підвищення ефективності використання інтелектуальних систем за рахунок редукції нечітких правил у базах знань. Пропонується два методи редукції: на основі алгоритму кластеризації та на основі генетичного алгоритму. На прикладі редукції бази знань задачі класифікації ірисів демонструється виконано порівняння запропонованих підходів. Задача редукції зводиться до пошуку хромосоми з мінімальним числом правил, що забезпечує якість класифікації. Найкращою буде та хромосома, яка дозволяє досягти максимуму оцінки класифікуючої здатності (не менше від початкової) бази знань за мінімальної кількості правил. Генетичний алгоритм виконується до тих пір, поки в результаті проведення обчислень не з'являтимуться хромосоми з кращою функцією пристосованості протягом певної кількості поколінь. Обчислювальна складність алгоритму безпосередньо залежить від числа лінгвістичних змінних та кількості термножин.

Застосування генетичного алгоритму розглядається також у роботі [3], де здійснюється відбір правил нечіткої бази знань збалансований за критеріями точності та компактності. В якості критерію точності нечіткої моделі обрано середньоквадратичну помилку (RMSE), формулюється задача багатофакторної оптимізації на основі правил і будується область припустимих рішень на околицях парето-фронту. Баланс між точністю моделі та її компактністю задається лінійним обмеженням. Для розв'язання задачі оптимізації використовується генетичний алгоритм, в якому кодування варіантів здійснюється на основі Піттсбурзького підходу. Варіант розв'язку задається хромосомою, кожен ген якої визначає належність відповідного правила до бази знань. Початкова популяція генерується випадково з використанням субоптимальних розв'язків, що відшукуються жадібним алгоритмом. Експерименти проводилися для сингтонних нечітких баз знань, у яких антецеденти правил задаються нечіткими множинами, а консеквенти – числовими значеннями.

Задача формування бази знань нейро-нечітких систем розв'язується у роботі [4]. Використовуються основні принципи редукції правил: виключаються правила, для яких результуюча функція приналежності менша за певний поріг; виключаються суперечливі правила, що взаємно компенсуються; виключається одне з двох правил, що збігаються; після оцінки індивідуального вкладу кожного правила виконується видалення тих правил, вплив яких на точність є мінімальним.

В роботі [5] застосовується система нечітких правил Такагі-Сугено. Підхід ґрунтується на контролі параметра «coverage of a data», який обчислює кількість активованих правил на основі навчальної вибірки, після чого редукції підлягають лише ті правила, які не збільшують значення coverage. У роботі

не розглядалися питання точності та адекватності бази правил після редукції, оскільки видаляються лише правила, що не використовуються. У процесі редукції база правил розбивається на підмножини правил із однаковими консеквентами.

Застосування підходів розрідженого кодування розглядається в роботі [6] разом із теорією розріджених представлень. Завдяки розрідженому кодуванню нечітких базисних функцій правила підлягають скороченню. Для вибору правил, які найбільше впливають на результат, застосовується алгоритм регресії за найменшим кутом LARS (least-angle regression), який є алгоритм підбору моделей лінійної регресії до багатовимірних даних. Правила, що мають найменший вплив на результат, підлягають редукції. У порівнянні з іншими алгоритмами розрідженого кодування, алгоритм регресії з найменшим кутом має меншу обчислювальну складність і кращу точність, особливо в задачах з багатовимірними даними.

Ще одним перспективним підходом є побудова прогнозуючої нейро-нечіткої мережі. Так у роботі [7] нейро-нечітка мережа використовується для синтезу адаптивного нечіткого регулятора. Нечіткі нейронні мережі поєднують у собі переваги нейронних мереж та систем нечіткого виведення, що дозволяє формувати модель управління багатофакторним процесом у вигляді правил нечітких продукцій. Редукція бази правил здійснюється шляхом вибору правил за допомогою нейронної мережі. У процесі налаштування нейронна мережа оцінює якість поточного набору нечітких правил щодо отриманих результатів та прогнозує коефіцієнт якості управління. З використанням отриманого прогнозу нечіткий регулятор дозволяє спрацьовувати на випередження до виникнення аварійної ситуації. За допомогою такого прогнозу експерт може провести заміну правил у базі знань нечіткого регулятора, або блок адаптації самостійно зможе обрати необхідні правила та стабілізувати процес регулювання без участі оператора технологічного процесу.

В описаних вище роботах розглядаються різні підходи до розв'язання задач редукції правил в експертних системах. Однак актуальним залишається вдосконалення підходів та методик редукції правил у базах знань з метою отримання стійких результатів у задачах класифікації. В даній роботі розробляється підхід до редукції бази правил, що побудована з використанням декартового добутку терм-множин вхідних змінних.

**Постановка задачі.** Розглядається задача редукції нечіткої бази правил, сформульованої для розв'язання задачі класифікації, з використанням критерію якості. Нечіткий класифікатор задається продукційною базою правил,  $p$ -е правило  $P_p$  має вигляд:

$$P_p : \text{IF } k_1 \text{ is } a_{1p} \text{ AND } k_2 \text{ is } a_{2p} \text{ AND } \dots \text{ AND } k_L \text{ is } a_{Lp} \quad (1) \\ \text{THEN } y \text{ is } c_p,$$

де  $k_1, k_2, \dots, k_L$  – ознаки об'єкту, що описуються лінгвістичними змінними;  $a_{lp}$  – лінгвістичний терм, яким описується змінна у правилі  $p$ ;  $y$  – вихідна

змінна;  $p = \overline{1, P}$ ;  $P$  – загальна кількість правил  $\Pi$ ;  $c_p$  – приймає значення  $C_m \in C$  для правила  $p$ ;  $C_m$  – мітка класу, до якого належить об'єкт  $x_i \in X$ ;  $m$  – номер класу  $C$ ,  $m = \overline{1, M}$ ;  $M$  – кількість класів  $C$ .

Нечіткий класифікатор здійснює відображення вхідного об'єкта відносно його ознак  $k_1, k_2, \dots, k_L$  до множини класів  $C$ :

$$\tilde{C}_m = f(x) = \frac{\langle \sum_{p=1}^P c_p \cdot \mu_{a_{1p}}(k_1) \cdot \mu_{a_{2p}}(k_2) \cdot \mu_{a_{Lp}}(k_L) | c_p \in \Pi_p, c_p = C_m \rangle}{\langle \sum_{p=1}^P \mu_{a_{1p}}(k_1) \cdot \mu_{a_{2p}}(k_2) \cdot \mu_{a_{Lp}}(k_L) | \Pi_p \rangle}. \quad (2)$$

Повна база правил будується автоматично на основі даних навчальної вибірки. Консеквенти правил генеруються за допомогою операції декартового добутку терм-множин всіх лінгвістичних змінних задачі. Враховуючи, що побудована в такий спосіб база правил має значний розмір і може бути надлишковою, необхідно розробити підхід, який дозволить виконати скорочення кількості правил у базі знань, не знижуючи при цьому якість класифікації.

**Модель та метод дослідження.** Для розв'язання задачі класифікації будемо використовувати продукційну модель представлення знань, що поєднує моделі Мамдані та Такагі-Сугено-Канг [9].

Правила  $\Pi_p$  типу MISO зображуються у такий спосіб:

$$\Pi_p : \text{IF } k_1 \text{ is } a_{1p} \text{ AND } k_2 \text{ is } a_{2p} \text{ AND } \dots \text{ AND } k_L \text{ is } a_{Lp} \quad (3)$$

$$\text{THEN } y \text{ is } f(k_1, \dots, k_L, p) \cdot c_p,$$

де функція  $f(k_1, \dots, k_L, p)$  – дійсна, невід'ємна, нормована, неперервна на відрізьку  $[a, b]$  і використовується як ваговий коефіцієнт для консеквенту правила. Вона визначає ступінь належності вихідної змінної у терм-множині  $C_m$  і обчислюється в такий спосіб:

$$f(k_1, \dots, k_L, p) = \frac{\sum_{l=1}^L \mu_{a_{lp}}(k_l)}{L}. \quad (4)$$

Для організації процедури редукції бази правил вводиться критерій якості:

$$\Delta < \min(\text{accuracy}, \text{avg}(\text{precision}, \text{recall}, \text{f1-score})) , \quad (5)$$

де accuracy, precision, recall, f1-score – метрики якості та повноти класифікації [8].

Критерій  $\Delta$  приймає значення від 0 – 100% і буде мірою якості, яку необхідно досягти. Досягнення критерієм заданого значення використовується як умова зупинення процедури редукції вхідної бази правил.

Для організації процедури редукції у кожне правило вводяться додаткові логічні умови:

$$\Pi_p : \text{IF } (\alpha_p > 0 \text{ AND } \beta_p > 0) \text{ AND } k_1 \text{ is } a_{1p} \text{ AND } k_2 \text{ is } a_{2p} \text{ AND } \dots \text{ AND } k_L \text{ is } a_{Lp} \quad (6)$$

THEN  $y$  is  $f(k_1, \dots, k_L, p) \cdot c_p$ ;

$$\alpha_p = \sum_{i_{Train}=1}^{I_{Train}} 1, x_{i_{Train}}^{Train}(k_1, k_2, \dots, k_L) : (k_1 \text{ is } a_{1p} \text{ AND } k_2 \text{ is } a_{2p} \text{ AND } \dots \text{ AND } k_L \text{ is } a_{Lp}) \text{ EQ}(\text{TRUE}) ; \quad (7)$$

$$\beta_p = \frac{\sum_{i_{Train}=1}^{I_{Train}} f(k_1, \dots, k_L, p), x_{i_{Train}}^{Train}(k_1, k_2, \dots, k_L) : (k_1 \text{ is } a_{1p} \text{ AND } \dots \text{ AND } k_L \text{ is } a_{Lp}) \text{ EQ}(\text{TRUE})}{\alpha_p} \quad (8)$$

де коефіцієнт активації  $\alpha$  є лічильником кількості активацій правила  $\Pi_p$  для об'єктів  $x_{i_{Train}}^{Train}$  навчальної вибірки  $X^{Train}$ ; коефіцієнт  $\beta$  визначає ступінь належності об'єктів навчальної вибірки правилу  $\Pi_p$ ;  $I_{Train}$  – розмір навчальної вибірки,  $x_{i_{Train}}^{Train}$  – об'єкт навчальної вибірки  $x_{i_{Train}}^{Train} \in X^{Train}$ ,  $X^{Train}$  – навчальна вибірка.

Для організації алгоритму редукції застосовується метод дихотомії з динамічним кроком. Даний метод дозволяє розділити множину правил на результуючу множину правил і множину правил, що є надмірними для досягнення критерію якості  $\Delta$ . Таким чином, результуюча множина правил задовольнятиме критерію якості (5).

**Адаптивний алгоритм редукції бази правил.** Для здійснення процедури редукції застосовується метод дихотомії з динамічним кроком. Алгоритм процедури може бути представлений такою послідовністю дій:

Крок 0. На вхід системи подати базу правил виду (3). Задати критерій точності  $\Delta$ . Задати навчальну та тестову вибірки. Виконати процедуру нечіткого логічного виводу Мамдані з центроїдним методом. Обчислити коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  за формулою (7) і (8) для навчальної вибірки. Перевизначити вхідну базу правил виду (3) до бази правил (6). Скоротити правила, для яких значення коефіцієнта  $\alpha$  дорівнює 0.

Крок 1. Обчислити метрики якості моделі accuracy, precision, recall, f1-score для всіх правил на тестовій вибірці та перевірити умову (5). Якщо (5) є істиною, то набір правил  $\Pi$  підлягає редукції. Перейти до кроку 2.

Крок 2. Відсортувати усі правила  $\Pi$  відносно коефіцієнта  $\beta$ , отримати впорядкований набір правил  $\vec{\Pi}$ . Створити порожню множину  $\dot{\Pi} = \emptyset$  для збереження в неї нової бази правил, яка формуватиметься внаслідок ітеративного процесу.

Крок 3. Обчислити потужність множини  $\vec{\Pi}$ , якщо  $card(\vec{\Pi})=1$ , то  $\dot{\Pi} = \dot{\Pi} \cup \vec{\Pi}$  і перейти до кроку 7, інакше, перейти до кроку 4.

Крок 4. Розділити набір правил  $\vec{\Pi}$  на 2 множини:  $\vec{\Pi}1 = \{\vec{\Pi}_1, \dots, \vec{\Pi}_{\bar{p}/2-1}\}$  і

$$\vec{\Pi}2 = \{\vec{\Pi}_{\bar{p}/2}, \dots, \vec{\Pi}_{\bar{p}}\}, \text{ при цьому } \forall (\alpha, \beta) \leq \vec{\Pi}1 \quad \vec{\Pi}2$$

Крок 5. Обчислити accuracy, precision, recall, f1-score для правил  $\vec{P} \cup \vec{P}2$  на тестовій вибірці.

Крок 6. Перевірити умову (5), якщо вона є істинною, то набір правил  $\vec{P} = \vec{P}2$ , перейти до кроку 3, інакше,  $\vec{P} = \vec{P} \cup \vec{P}2$ ,  $\vec{P} = \vec{P}1$ , перейти до кроку 3.

Крок 7. Завершити процес редукції бази правил, отримати множину  $\vec{P}$ .

**Аналіз результатів.** Запропонований підхід до побудови нечіткої бази правил для класифікації об'єктів був застосований для відомої задачі мультикласової класифікації Iris Data Set – Іриси Фішера [10]. Задача класифікації передбачає визначення приналежності ірису до одного з 3 типів рослин: Setosa, Versicolor, Virginica. Усього в наборі міститься 150 об'єктів, кожному із трьох класів відповідає по 50 об'єктів. В якості ознак об'єкту використовуються довжина чашолистка – sepalLength, ширина чашолистка – sepalWidth, довжина пелюстки – petalLength, ширина пелюстки – petalWidth. Для проведення класифікації були сформовані навчальна та тестова вибірки у розмірі 130/20 (навчальна/тестова).

Для початкових даних задачі було обчислено коефіцієнти кореляції ознак (рис. 1):

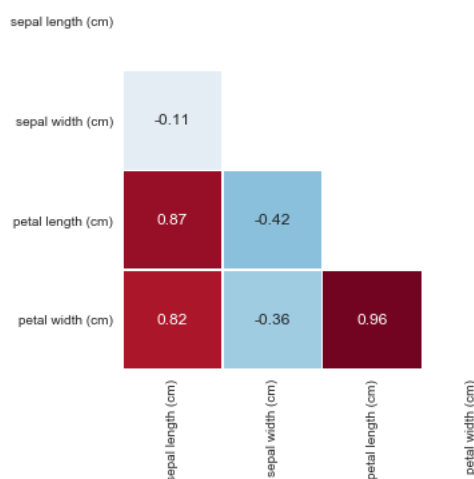


Рис. 1. Значення коефіцієнтів кореляції

З урахуванням інтерпретації значень коефіцієнтів було встановлено, що між змінними «petal length (cm)» та «petal width (cm)» існує сильна залежність, значення коефіцієнта кореляції – 0.96, між змінними «sepal width(cm)» та «sepal length (cm)» слабка залежність, значення відповідного коефіцієнта кореляції дорівнює -0.11. Відповідно до запропонованого походу було побудовано повну базу правил, що складається з 81 правила і має точність класифікації 93%. З використанням розробленого адаптивного алгоритму було проведено редукцію бази правил, оцінено вплив процедури редукції на якість отриманої бази правил, отримано результати класифікації з використанням скороченої бази правил.

В таблиці 1 представлені антецеденти правил та значення коефіцієнтів  $\alpha$ , що відповідають кожному з правил. Перші 19 правил, антецеденти яких не були

активовані жодним об'єктом навчальної вибірки, мають значення коефіцієнту  $\alpha=0$  та можуть бути видалені з бази знань без втрати якості класифікації. Для решти 62 правил значення коефіцієнту  $\alpha$  відрізняється від нуля.

Таблиця 1

№ правила	$\alpha$	Антецедент
1	0.0	{'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'High', 'PetalLengthCm': 'Low', 'PetalWidthCm': 'Mid'}
2	0.0	{'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'High', 'PetalLengthCm': 'Mid', 'PetalWidthCm': 'Low'}
3	0.0	{'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'Low', 'PetalWidthCm': 'Low'}
...	...	...
19	0.0	{'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'High', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'Low'}
20	10.0	{'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'Low', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'Low'}
...	...	...
33	63.0	{'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'High'}
...	...	...
48	93.0	{'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Low', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'Mid'}
...	...	...
81	100	{'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'High'}

Для правил, що залишилися, було обчислено значення коефіцієнта  $\beta$ , в таблиці 3 представлені правила, що розташовані в порядку зменшення значень коефіцієнта  $\beta$ .

Таблиця 2

№	$\beta$	Правила
1	0.431	{'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'High', 'PetalLengthCm': 'Low', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-setosa'
2	0.303	IF {'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'Low', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-setosa'
3	0.219	IF {'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'High'} THEN 'Iris-virginica'
...	...	...
10	0.089	IF {'SepalLengthCm': 'Mid', 'SepalWidthCm': 'Low', 'PetalLengthCm': 'Mid', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-versicolor'
...	...	...
23	0.044	IF {'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Low', 'PetalLengthCm': 'Mid', 'PetalWidthCm': 'Mid'} THEN 'Iris-versicolor'
24	0.043	IF {'SepalLengthCm': 'Mid', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'Mid', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-versicolor'
25	0.039	IF {'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'Mid'} THEN 'Iris-versicolor'
...	...	...
43	0.012	IF {'SepalLengthCm': 'High', 'SepalWidthCm': 'Low', 'PetalLengthCm': 'Mid', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-versicolor'
...	...	...
62	0.001	IF {'SepalLengthCm': 'Low', 'SepalWidthCm': 'Mid', 'PetalLengthCm': 'High', 'PetalWidthCm': 'Low'} THEN 'Iris-versicolor'



Після застосування алгоритму редукації для заданого значення точності  $\Delta = 90\%$ , базу правил було скорочено до 15 правил. Слід зазначити, що у результуючій базі перебувають правила, які описують усі вихідні класи об'єктів.

Для проведення класифікації з використанням редукованої бази правил були сформовані навчальна та тестова вибірки у розмірі 130/20, відповідно. На рис. 2 наведено матрицю протиріч, отриману для результатів класифікації на тестовій вибірці за допомогою редукованої бази правил. У тестовій вибірці містилося 20 об'єктів (3 – *Iris-setosa*, 9 – *Iris-versicolor*, 8 – *Iris-virginica*), серед яких правильно ідентифіковані всі об'єкти класів *Iris-setosa* та *Iris-virginica*. З 9 об'єктів класу *Iris-versicolor* вірно ідентифіковані 7 об'єктів, один об'єкт був неправильно класифікований як *Iris-setosa*, а другий – як *Iris-virginica*.

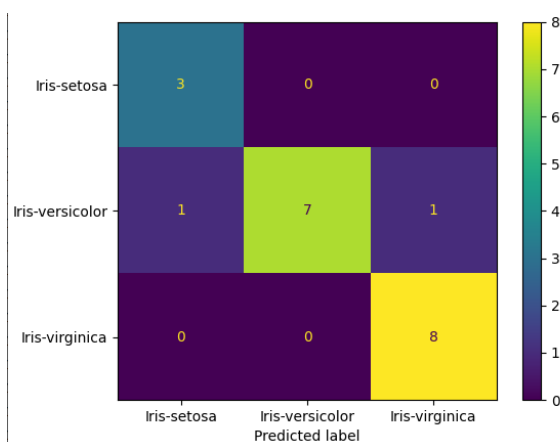


Рис. 2. Матриця протиріч – 130/20 (навчальна/тестова), точність 90% при використанні 1–15 правил з таблиці 2

Таблиця 3

Клас ірисів	precision	recall	f1-score	кількість елементів тестової вибірки
<i>Iris-setosa</i>	0.75	1.00	0.86	3
<i>Iris-versicolor</i>	1.00	0.78	0.88	9
<i>Iris-virginica</i>	0.89	1.00	0.94	8
avg accuracy	0.9			

В таблиці 3 наведено значення метрик якості класифікації. Зменшення кількості правил у базі знань дозволило суттєво скоротити час, необхідний для проведення класифікації.

Далі було досліджено вплив розмірів навчальної та тестової вибірок на якість класифікації. Об'єкти було розподілено на навчальну та тестову вибірки у відношенні 100/50 відповідно. При заданому критерії якості  $\Delta = 90\%$  антецеденти 25 правил не були активовані жодним об'єктом навчальної вибірки та підлягали видаленню з бази правил. Після виконання етапів алгоритму результуюча база правил складалась 17 правил.

На рис. 3 наведено матрицю протиріч, отриману для результатів класифікації на тестовій вибірці за допомогою редукованої бази правил. У тестовій вибірці містилося 50 об'єктів (17 – *Iris-setosa*, 16 – *Iris-versicolor*, 17 –

Iris-virginica), серед яких правильно ідентифіковані всі об'єкти класу Iris-setosa. З 16 об'єктів класу Iris-versicolor вірно ідентифіковані 14 об'єктів, 2 об'єкта було неправильно класифіковано як Iris-virginica. З 17 об'єктів класу Iris-virginica вірно ідентифіковані 14 об'єктів, 3 об'єкта було неправильно класифіковано як Iris-setosa. Можна зазначити, що при зменшенні розмірів навчальної вибірки розмір редукованої бази правил збільшився незначно, при цьому якість класифікації відповідає заданому критерію.

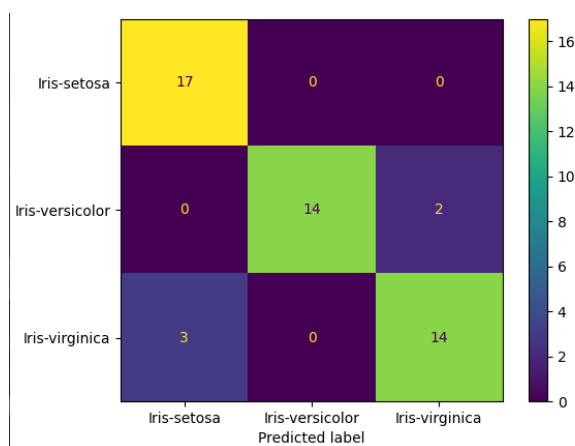


Рис. 3. Матриця протиріч – 100/50 (навчальна/тестова), точність 90% при використанні 1–17 правил

У таблиці 4 наведено значення метрик якості класифікації.

Таблиця 4

Клас ірисів	precision	recall	f1-score	кількість елементів тестової вибірки
Iris-setosa	0.85	1.00	0.92	17
Iris-versicolor	1.00	0.88	0.93	16
Iris-virginica	0.88	0.82	0.85	17
avg accuracy	0.9			

**Висновки.** У роботі розглядається процедура редукції нечіткої бази правил для розв'язання задачі мультикласової класифікації з використанням критерію якості. Нечіткий класифікатор задається продукційною базою правил, використано продукційну модель, яка поєднує моделі Мамдані та Такагі-Сугено-Канг. Повна база правил генерується автоматично з використанням операції декартового добутку терм-множин всіх лінгвістичних змінних задач. Для виконання процедури редукції повної бази правил вводиться критерій якості, побудований з використанням метрик якості класифікації. Розроблено адаптивний алгоритм редукції бази правил на основі методу дихотомії з динамічним кроком. В результаті роботи алгоритму з бази правил видаляються правила, антецеденти яких не активовані, серед правил, що залишилися, вибираються правила, які мають найбільший вплив на результат класифікації. Обчислювальний експеримент проведено для розв'язання задачі мультикласової класифікації Ірисів Фішера, аналіз результатів класифікації з

використанням редукованої бази правил виконано для об'єктів тестової вибірки. Досліджено вплив параметрів процедури навчання на точність класифікації.

### Бібліографічні посилання

1. Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE Trans. on Computers*. 1994. 43, N 11. P. 1329–1333. DOI: 10.1109/12.324566
2. Абдулхаков А.Р., Катасёв А.С., Кирпичников А.П. Методы редукции нечетких правил в базах знаний интеллектуальных систем. *Вестник Казанского технологического университета*. 2014. Vol. 17, no. 23. Pp. 389-392.
3. Штовба С.Д., Мазуренко В.В., Савчук Д.А. Генетичний алгоритм вибору правил нечіткої бази знань, збалансованої за критеріями точності та компактності. *Наукові праці Вінницького національного технічного університету*. 2012. № 3. С. 1-9.
4. Клебанова Т.С., Рудаченко О.О. Особливості використання нейро-нечітких моделей у фінансовій діяльності комунальних підприємств. *Економічний вісник Запорізької державної інженерної академії*. 2016. Вип. 5(1). С. 108-112.
5. Michal Burda, Martin Stepnicka Reduction of Fuzzy Rule Bases Driven by the Coverage of Training Data. *Proceedings of the 2015 Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology, Advances in Intelligent Systems Research*. Atlantis Press. 2015. Pp. 463-470.
6. Huiqin Jiang, Rung-Ching Chen, Qiao-En Liu, Su-Wen Huang Fuzzy Rules Reduction Based on Sparse Coding. *International Journal of Applied Science and Engineering*. 2019. Volume 16, No.3. Pp. 215-227.
7. Михайленко В.С., Харченко Р.Ю. Синтез адаптивного нечіткого регулятора з прогнозувальною нейронечною мережею. *Одеська державна академія холоду, Одеса; Вісник СумДУ. Серія "Технічні науки"*. 2012. №3'. С. 30-37.
8. Eli Stevens, Luca Antiga, Thomas Viehmann *Deep Learning with PyTorch*. Manning Publications Co. Shelter Island, NY 11964. 2020. 520 p.
9. Желдак Т.А., Коряшкіна Л.С., Ус С.А. Нечіткі множини в системах управління та прийняття рішень: навч. посіб. за редакцією С. А. Ус; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро: НТУ «ДП». 2020. 387 с.
10. The Iris dataset by R.A. Fisher's in Kaggle data sets webpage. Available at: <https://www.kaggle.com/datasets/uciml/iris>

Надійшла до редколегії 12.06.2022.

**К.Є. Золотько, Д.В. Красношанка**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **УПРАВЛІННЯ ТА ДІАГНОСТИКА НАДАННЯ ІТ-СЕРВІСІВ**

Робота присвячена вибору параметрів та діагностиці режимів роботи служб надання електронних послуг таких як послуги провайдерів інтернету, електронної пошти та ін. В статті розглянуто декілька моделей розпізнавання режимів роботи таких служб. Надані математичні аспекти роботи діагностичних систем в залежності від визначення параметрів.

**Ключові слова:** іт-сервіси, системи діагностики, розпізнавання режимів роботи, поділяюча функція, детермінований та імовірнісний підходи, експертні системи.

**K.E. Zolotko, D.V. Krasnoshapka**

*Oles Gonchar Dnipro National University*

## **MANAGEMENT AND DIAGNOSTICS OF IT-SERVICES PROVISION**

The work is devoted to the selection of parameters and diagnostics of the modes of operation of services providing electronic services, such as the services of Internet providers, e-mail, etc. Several models of recognition of the modes of operation of such services are considered in the article. Mathematical aspects of the operation of diagnostic systems depending on the definition of parameters are provided.

Management systems of information divisions of enterprises and organizations are quite complex, as it is necessary to take into account the interests of a large number of participants involved in both the creation and use of IT resources. In general, IT management covers the management of all information, computer and communication resources of the enterprise. The main task of IT support services is to create and maintain applications and the infrastructure on which they run in a working condition.

The diagnostic system always (or with a high degree of reliability) assigns a mode characterized by a set of diagnostic parameters at each discrete moment of time to one of the classes. The recognition system must be able to compose its states in such a way that the classification of the set, which consists of the values measured during the operation of the service, is carried out correctly. There are two approaches to constructing a dividing function - deterministic and probabilistic. In the first, it is assumed that the images do not overlap, which means that there are no images that belong to both classes at the same time.

In the second case, this possibility is allowed: it is assumed that for each point there is a certain probability of belonging to one or another class. It is obvious that the probabilistic approach contains deterministic as a special case.

IT services will become more and more widespread. A large number of enterprises in the IT industry prefer to provide services instead of trading software. However, processes in this industry require compliance with the principles of profitability. Therefore, the creation of expert systems will help to significantly reduce the costs of supporting IT services. The basis of any expert system is the knowledge base. In this expert system, the knowledge base should be a conglomerate of mathematical algorithms, as well as qualitative and quan-

titative parameters of the enterprise where such systems are expected to be implemented.

**Keywords:** IT services, diagnostic systems, recognition of work modes, dividing function, deterministic and probabilistic approaches, expert systems.

**К.Е. Золотько, Д.В. Красношарпа**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **УПРАВЛЕНИЕ И ДИАГНОСТИКА ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ ИТ-СЕРВИСОВ**

Работа посвящена выбору параметров и диагностике режимов работы служб предоставления электронных услуг таких как услуги провайдеров интернета, электронной почты и др. В статье рассмотрено несколько моделей распознавания режимов работы таких служб. Предоставлены математические аспекты работы диагностических систем в зависимости от определения параметров.

**Ключевые слова:** it-сервисы, системы диагностики, распознавание режимов работы, разделяющая функция, детерминированный и вероятностный подходы, экспертные системы.

**Вступ.** Питанням вибору параметрів роботи різноманітних ІТ-сервісів нині приділяється все більша увага. У більшості випадків ІТ-сервіс є такою ІТ-послугою яку надає відповідний підрозділ іншим підрозділам підприємства або зовнішнім споживачам.

Системи управління інформаційними підрозділами підприємств і організацій є досить складними, оскільки потрібно враховувати інтереси великої кількості учасників, що залучені як до створення так й для використання ІТ-ресурсів. Взагалі ІТ-менеджмент охоплює управління всіма інформаційними, комп'ютерними та комунікаційними ресурсами підприємства. Основним завданням служб підтримки ІТ-сервісів полягає у створенні та підтримці в працездатному стані додатків та інфраструктури, на якій вони виконуються.

Потрібно враховувати, що створення інфраструктури ІТ-сервісів потребує, частіше за все, досить великих коштів. Крім того, ненадання або несвоєчасне їх надання може призвести до великих збитків як у фінансовому, так і іміджевому аспектах великих підприємств. Тому потрібно вміти визначати основні параметри, діагностувати та керувати службами надання електронних послуг.

**Постановка задачі.** Таким чином, для створення, підтримки та керування службою ІТ-сервісів необхідно обрати модель такої служби, визначити її параметри та вміти діагностувати режими роботи. Як показує аналіз літературних джерел [1-4], розрахунок тих чи інших аспектів роботи служб підприємства є досить тривалим і складним процесом, який враховує безліч додаткових параметрів. Тому створення експертної системи для цих цілей дозволяє значно скоротити час проведення діагностики, поліпшити вибір параметрів і підвищити точність управління.

Одним із основних елементів експертної системи є база знань. В даному випадку база знань повинна містити математичні алгоритми визначення ключових параметрів та режимів роботи ІТ-сервісів [5].

**Методи розв'язання.** Нехай процес надання електронних сервісів контролюється в моменти часу  $t_i$  за допомогою діагностичних змінних  $X(t_i) = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)\}$ , які визначають її режими роботи  $D(t_i) = \{D_1(t_i), D_2(t_i), \dots, D_m(t_i)\}$ .

Діагностична система завжди (або з великою ступеню надійності) відносить режим, який характеризується набором діагностичних параметрів  $X(t_i)$  в кожний дискретний момент часу  $t_i (i = 1, 2, \dots, \mu)$  до одного з класів  $D_j$ .

Розглянемо випадок, коли режим роботи сервісів визначається поточним критерієм затрат на одиницю запитів  $S(t)$ . У такому випадку можливо записати:

$$S[X(t_i)] = \begin{cases} S_1, \text{ якщо } X(t_i) \in D_1 \\ S_2, \text{ якщо } X(t_i) \in D_2 \\ \dots \\ S_m, \text{ якщо } X(t_i) \in D_m, \end{cases} \quad (1)$$

де  $S_1, \dots, S_m$  – постійні величини;  $X(t_i)$  – вектор вартості доступу до сервісу;  $D_1, \dots, D_m$  – підмножини множини  $D$  значень вектора  $X(t_i)$ , що не перетинаються. Величини  $S_1, \dots, S_m$ , як правило відомі, тому під області  $D_1, \dots, D_m$  задані.

Для спрощення процесу розпізнавання класів (режимів) роботи сервісів вектор змінних  $X(t_i) = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)\}$  може бути закодований у вигляді набору простих (бінарних) ознак  $k_{j_1}(t_i)$  або  $k_{j_2}(t_i)$ , які фіксуються в моменти часу  $t_i$ .

Для того, щоб система була здатна навчатися процесу розпізнавання, вона повинна мати таке число  $M$  своїх внутрішніх станів  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_M\}$ , які могли б класифікувати вектор  $X(t_i)$  необхідним чином. Навчання системи розпізнавання відбувається шляхом пред'явлення їй порівняно невеликого числа контрольних векторів  $X(t_i)$ , коли система може переходити у стан  $Z^*$ , в якому відбувається необхідна класифікація.

Таким чином, система розпізнавання повинна бути здатна так компонувати свої стани, щоб класифікація множини, яка складається зі значень  $X(t_i)$ , що вимірюються у процесі роботи сервісу, проходила правильно.

Якщо взяти за основу гіпотезу компактності образів, то методичну задачу розпізнавання можна представити у вигляді певної поверхні, яка розділяє простір вимірів на області. В кожній області містяться точки  $X(t_i)$ , які належать режиму  $D_j$ .

Мається два підходи до побудови поділяючої функції – детермінований та імовірнісний. В першому передбачається, що образи не перетинаються, це означає, що відсутні зображення, які належать обом класам одночасно.

У другому випадку така можливість допускається: передбачається, що для кожної точки існує визначена імовірність належності до того чи іншого класу. Очевидно що імовірнісний підхід містить у собі детермінований, як окремий випадок.

Для прикладу розглянемо простий детермінований алгоритм бінарного розпізнавання. У цьому випадку режими, які розпізнаються, повинні бути віднесені до одного із двох класів:  $D_1$  – бажаний режим;  $D_2$  – не бажаний режим.

Визначимо системи еталонних точок  $Y_{1(j_1)} (j_1 = 1, \dots, n_1)$ ,  $Y_{2(j_2)} (j_2 = 1, \dots, n_2)$  для режимів  $D_1$  і  $D_2$ . Вектор  $X(t_i)$  вважається таким, що належить класу  $D_1$ , якщо відстань  $l(X, Y_{1(j_1)})$  від  $X$  до найближчої з точок  $Y_{1(j_1)}$  менша ніж відстань  $l(X, Y_{2(j_2)})$  до найближчої з точок  $Y_{2(j_2)}$ . В іншому випадку вектор  $X$  вважається таким, що належить  $D_2$ . Відстань між точками  $X$  і  $Y_{i(j_i)}$  ( $i = 1, 2$ ) визначається за наступним виразом

$$l(X, Y_{i(j_i)}) = \sqrt{(X - Y_{i(j_i)})(X - Y_{2(j_2)})} \\ (i = 1, 2; j_i = 1, 2, \dots, n_i) \quad (2)$$

В задачах діагностики надання електронних сервісів можна використовувати різноманітні алгоритми розпізнавання.

Розглянемо алгоритм розпізнавання по найменшій відстані між точками. Відповідно до цього алгоритму, режим надання сервісів може бути визначений набором ознак  $X(t_i) = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)\}$  у відповідному  $m$ -мірному просторі точкою з координатами  $x_j (j = 1, \dots, m)$ .

Усі об'єкти одного образу (точки) групуються у певній локальній області  $K$ . З появою нового режиму (нової точки у просторі ознак)  $X_0$  його розпізнавання виконується шляхом оцінки відстані до центру найближчої області  $l(X_0, K)$ .

Відповідно до цього для кожного  $k$ -го режиму системи надання сервісів визначаються середні значення змінних (ознак)  $x_j$  і середньоквадратичне відхилення від середнього  $\bar{x}_j$ , тобто  $\sigma_j$

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2} \quad (3)$$

Потім проводиться оцінювання коефіцієнтів  $g$  «ваги» (впливу) кожної ознаки

$$g_{jk} = \frac{\bar{x}_{jk}}{\sigma_{jk} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\bar{x}_{jk}}{\sigma_{jk}}}; \sum_i g_{ik} = 1 \quad (4)$$

Введемо ваговий коефіцієнт  $\psi_j$ , що враховує вплив (важливість)  $j$ -ї ознаки з умови, що  $\sum_{j=1}^m \psi_j = 1$ . Якщо вплив усіх ознак на режими однаковий, то

$$\psi_j = \frac{1}{m} \quad (5)$$

Визначаємо граничні (мінімальний і максимальний) радіуси областей розташування точок, які характеризують кожний із режимів системи сервісів

$$\left. \begin{aligned} R_k^{\min} &= \sum_j g_{ik}^2 \psi_j^2 \Delta_{j\min}^2; \\ R_k^{\max} &= \sum_j g_{ik}^2 \psi_j^2 \Delta_{j\max}^2; \\ \Delta_{jk\min}^2 &= \min \left\{ \left(1 - \frac{x_{jk}^{\min}}{x_{jk}}\right); \left(1 - \frac{x_{jk}^{\max}}{x_{jk}}\right) \right\}; \\ \Delta_{jk\max}^2 &= \max \left\{ \left(1 - \frac{x_{jk}^{\min}}{x_{jk}}\right); \left(1 - \frac{x_{jk}^{\max}}{x_{jk}}\right) \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де  $x_{jk}, x_{jk}^{\max}, x_{jk}^{\min}$  - середнє, максимальне і мінімальне значення  $j$ -ї ознаки із вибірки, що відноситься до  $k$ -го режиму.

Таким чином проводимо розподіл вже існуючих областей для діагностування надання сервісів.

Для розпізнавання нового режиму (нової точки  $X$  у просторі ознак) необхідно визначити відстань від цієї точки до центру кожного з режимів (образів)

$$l(x_0, K) = \sqrt{\sum_{j=1}^m g_{ik}^2 \left(1 - \frac{x_{0k}}{x_{jk}}\right) \psi_j^2}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

При цьому значення  $l^*(x_0, k) = \min$  свідчить про те, що набір ознак  $x_{oj}$  найбільш відповідає  $k$ -му режиму надання сервісів.

Для деяких параметрів сервісів дуже важко надати експертну оцінку не маючи уявлення про їх специфіку, сферу діяльності та структуру. У таких випадках доцільно використовувати імовірнісний алгоритм розпізнавання по фазових інтервалах. Нехай діагностичні змінні  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  кодуються набором одиниць і нулів. З цією метою діапазон змінної  $x_j$  від  $x_j^{\min}$  до  $x_j^{\max}$  розбивається на ряд інтервалів (рівнів). Кожен такий рівень буде являти собою ознаку і кодується як  $k_j = 1$  або  $k_j = 0$ .



Відстань між точками з координатами  $A(k_{A1}, k_{A2}, \dots, k_{Am})$  і  $B(k_{B1}, k_{B2}, \dots, k_{Bm})$  у системі координат перетворених ознак визначається виразом

$$l(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (k_{Ai} - k_{Bi})^2} \quad (8)$$

При  $k_{Aj} - k_{Bj} = 0$ ,  $k_{Aj} = k_{Bj}$  і  $k_{Aj} - k_{Bj} = 1$ ,  $k_{Aj} \neq k_{Bj}$ . Максимальні значення  $l(A, B)$  будуть тоді, коли всі ознаки узгоджуються, однак максимальне число розбіжностей для кожної  $k_j$  ознаки дорівнюють двом, тому

$$l^{\max}(A, B) = \sqrt{2m}. \quad (9)$$

Відповідно до гіпотези компактності кожен режим (образ) має центр розподілу точок в просторі ознак  $k_j$ . Точки які належать даному образу, знаходяться ближче до центру.

Середній квадрат відхилень точок  $k$ -області від центру

$$D_k^2 = \sum_{j=1}^m p'_{kj} (1 - p_{kj}) \quad (10)$$

де  $p_{kj}$  – умовна ймовірність значень ознак режиму, які мають значення  $k = 1$ .

Середній радіус цієї області

$$R_k = \lambda \sqrt{D_k^2}, \text{ при } \lambda = 0,5 \quad (11)$$

Відстань аналізованої точки  $x_{0j}(k_{01}, k_{02}, \dots, k_{0m})$  до центру  $k$ -ї області визначається наступним чином:

$$l^2(x_0, k) = \sum_{j=1}^m (1 - p_{kj})^2 \quad (12)$$

Точка буде належати області  $k$ , якщо відстань до центру цієї області буде менше, ніж до центру інших областей і менше радіуса до  $k$ -ї області  $l^{\min}(x_0, k) < R_k$ .

Під час діагностики сервісів на основі експериментальних даних створюється таблиця. Кожна з колонок відповідає одній ознаці, а кожен з рядків режиму (образу). Додатковий стовпець характеризує частоту появи  $j$ -ї ознаки в цілому по всій сукупності режимів (образів). Кожен стовпець і рядок таблиці підраховуються і визначаються ймовірності:

Апріорна ймовірність появи  $k$ -го режиму (образу)

$$p_k = \frac{n_{kj}}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad (13)$$

де  $n$  – кількість даних (вимірів), які потрапили в  $k$ -й рядок (режим);  $N$  – загальна кількість даних навчальної вибірки.

Умовну ймовірність появи  $j$ -го ознаки для  $k$ -го образу (режиму)

$$p_k = \frac{n_{kj}}{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

де  $n_{kj}$  - кількість збігів появи  $j$ -ї ознаки для  $k$ -го режиму, які відповідають сумам значень в клітині  $j$ -го стовпця  $k$ -го рядка.

Очевидно, що  $1 - p_{kj}$  - умовна ймовірність відсутності  $j$ -ї ознаки для  $k$ -го образу. Безумовну ймовірність  $j$ -ї ознаки

$$p_j = \frac{n_j}{\sum_{j=1}^m n_j}; \sum_{j=1}^m p_j = 1 \quad (15)$$

де  $n_j$  - сумарне число значень, які потрапили в  $k$ -й стовбець ознак.

Складання діагностичної таблиці і розрахунок ймовірностей відповідають етапу навчання. Потім необхідно за формулою (10) знайти відстань від точки (яка аналізується)  $x_0$  до центру кожної з областей, які характеризують образи (режими). Для найменшої відстані необхідно перевірити умову  $l^{\min}(x_0, k) < R_k$ .

**Аналіз результатів.** Таким чином, основу бази знань експертної системи діагностики та управління ІТ-сервісами підприємства представляють математичні алгоритми, що були розглянуті вище. Крім того, необхідно врахувати низку факторів та оцінку цих факторів, яку мають давати фахівці. Наприклад, коли йдеться про сервіс надання послуг електронної пошти необхідно врахувати захист від несанкціонованого доступу. При цьому час та вартість такої послуги повинні бути в межах отримання підприємством прибутку.

**Висновки.** ІТ-сервіси отримують все більше розповсюдження. Велика кількість підприємств ІТ-індустрії надає перевагу саме наданню послуг замість торгівлі програмним забезпеченням. Однак, процеси в цієї галузі потребують дотримання принципів прибутковості. Тому створення експертних систем допоможе значно скоротити витрати на підтримку ІТ-сервісів. Основою будь-якої експертної системи є база знань. У цій експертній системі база знань повинна бути конгломератом математичних алгоритмів, а також якісних і кількісних параметрів підприємства, де передбачається впровадження таких систем.

#### Бібліографічні посилання

1. Городня Т.А., Мойсеєнко І. П. Економічна та фінансова діагностика: навч. посіб. Львів: «Магнолія 2006», 2008. 282 с.
2. Мойсеєнко І.П., Демчишин М.Я. Моделі аналізу економічної безпеки суб'єктів господарювання. *Актуальні проблеми економіки*. 2010. №10 (112). С. 64-73.
3. Поддєрьогін А.М., Наумова Л.Ю. Фінансова стійкість підприємств у економіці. України: монографія. К.: КНЕУ, 2015. 184 с.
4. Матвієнко О.В. Основи інформаційного менеджменту: навчальний посібник. К.: Центр навчальної літератури, 2004. 128 с.
5. Джарратано Д., Райли Г. Экспертные системы. Принципы разработки и программирование. М.: Вильямс, 2007. 560 с.

Надійшла до редколегії 11.10. 2022.

**К.Д. Каравасєв, В.А. Турчина**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧ УПОРЯДКУВАННЯ З УРАХУВАННЯМ НЕПОВНОГО ЗАВАНТАЖЕННЯ**

У статті розглядається узагальнення задачі упорядкування на випадок неповного завантаження. Проводиться порівняння з іншими класами задач упорядкування, запропоновано модифікацію алгоритму, заснованого на максимальному паросполученні, яка враховує обмеження на структуру шуканого розв'язку. Показано, що відомі та модифікований алгоритм для цієї задачі є наближеними.

**Ключові слова:** дискретна оптимізація, теорія розкладів, оптимальні упорядкування, максимальне паросполучення, неповне завантаження.

**K.D. Karavaiev, V.A. Turchyna**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **GENERALISATION OF SEQUENCING PROBLEMS FOR THE CASE OF INCOMPLETE WORKLOAD**

A natural formalization of the practical tasks associated with the optimization of the execution order of technologically interrelated jobs to minimize overall completion time is the optimal sequencing problem.

In this article we consider a generalization of the sequencing problem for the case of incomplete workload. An additional constraint is introduced, reflecting the existence of a predefined set of weekends, during which the executors cannot perform their jobs. The proposed generalization is compared with the classical problem, the problem with variable sequencing width and the problem with job assignment.

The problem is studied for the case of a sequencing width equal to two. A modification of the algorithm based on the maximum matching which takes into account the constraints on the structure of the sought solution is proposed. It is shown that the introduced changes in the reachability graph generation do not allow relying on the proof of optimality of the original algorithm. The approach to the proof of the accuracy of the algorithms for these problems through the check of its optimality for the case of problems with dense sequencing is proposed.

A method for reducing given problem to the instance of scheduling problem with job assignment based on introduction of a dummy executor that allows fixing isolated vertices corresponding to weekends at given places in the sequencing is described. It is shown that due to uncertainty of performing of some steps, the well-known algorithms based on maximal matching and lexicographic labeling and the proposed modified algorithm for this case are approximate. Analysis of examples of suboptimality of the mentioned algorithms substantiates the prospect of investigating the possibility of introducing level principle into the modified algorithm.

**Keywords:** discrete optimization, scheduling theory, optimal sequencing, maximum matching, incomplete workload.

К.Д. Караваев, В.А. Турчина

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

## ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧ УПОРЯДОЧЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ НЕПОЛНОЙ ЗАГРУЖЕННОСТИ

В статье рассматривается обобщение задачи упорядочения для случая неполной загрузки. Проводится сравнение с другими классами задач упорядочения, предложена модификация алгоритма, основанного на максимальном паросочетании, которая учитывает ограничения на структуру искомого решения. Показано, что известные и модифицированный алгоритм в этом случае являются приближенными.

**Ключевые слова:** дискретная оптимизация, теория расписаний, оптимальные упорядочения, максимальное паросочетание, неполная загрузка.

Початок дослідження задач оптимального упорядкування вершин графів був пов'язаний із проблемою оптимізації порядку виконання робіт на конвеєрах автомобільного виробництва у середині минулого сторіччя. У наступні десятиріччя були досліджені численні узагальнення цієї задачі, розроблені точні та наближені методи їх розв'язання. У загальному випадку задача виявилася NP-важкою [1], тому особливу увагу науковців приділено пошуку спеціальних випадків, для яких існують поліноміальні точні алгоритми знаходження розв'язку.

Розглянемо класичну постановку задачі оптимального упорядкування та деякі її узагальнення, що виникли з необхідності враховувати додаткові обмеження та умови.

Нехай маємо  $n$  завдань, для яких відомі деякі виробничі зв'язки, що обумовлюють відносний порядок їх виконання. Математичну модель цих зв'язків природно подавати у вигляді орієнтовного графу  $G(V, U)$ , у якому вершини відповідають завданням, а дуги – виробничим зв'язкам. В класичній постановці, з якої розпочинилось дослідження, вважалось, що витрати часу на виконання кожного завдання однакові.

Для подальшої формалізації задач, що виникають, наведемо деякі відомі означення і постановки класичної задачі та деяких її узагальнень [2].

**Означення 1.** Паралельним упорядкуванням вершин орієнтовного графу  $G = (V, U)$  називається таке упорядкування його вершин по місцях, розташованих у лінію, при якому з того, що пара  $(i, j) \in U$  впливає, що вершина  $i$  розташовується в упорядкуванні  $S$  лівіше вершини  $j$ , тобто з того, що  $(i, j) \in U \wedge (i \in S[p], j \in S[q])$  впливає, що  $p < q$ .

**Означення 2.** Довжиною  $l$  упорядкування  $S$  називається число непорожніх місць в ньому:  $l(S) = \sum_{i=1}^n \text{sign}|S[i]|$ , де  $S[i]$  – множини елементів, що знаходяться в упорядкуванні  $S$  на місці  $i$ .

**Означення 3.** Шириною  $h$  упорядкування  $S$  називається величина, що дорівнює найбільшій кількості елементів, що розташовані на одному місці:  $h(S) = \max_{1 \leq i \leq n} |S[i]|$ .

**Задача 1 (класична).** По заданим графу  $G$  і значенню ширини  $h$  побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини.

**Задача 2 (узагальнена).** По заданим графу  $G$  і вектору значень ширини  $h_i, i = 1, \dots, n$  побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини, в якому на  $i$ -ому місці буде стояти не більше  $h_i$  вершин.

**Задача 3 (з призначенням).** По заданим графу  $G$ , значенню ширини  $h$  та вектору призначень  $f_i \in \{1, \dots, h\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), який визначає виконавця, що має виконати відповідну роботу, побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини.

Розглянемо також деякі інші модифікації задач.

**Означення 4.** Тривалістю виконання роботи  $p_i$  називається натуральне число, що визначає кількість місць в упорядкуванні, на яких має стояти відповідна вершина.

**Означення 5.** Задачі, в яких вершини з тривалістю виконання більше одиниці можуть бути розташовані лише на суміжних місцях, називаються задачами без переривань. Якщо ця умова не є обов'язковою, тоді маємо задачу із можливістю переривання.

Відзначимо, що у випадку задачі із можливістю переривання, вона може бути зведена до еквівалентної задачі, в якій тривалості виконання всіх робіт дорівнюють одиниці, шляхом заміни вершин на ланцюжки з довжинами, рівними тривалостям виконання відповідних робіт. У подальшому будемо розглядати лише такі задачі.

Перейдемо тепер до дослідження нового класу задач упорядкування.

Нехай для деякої підмножини виконавців визначені заплановані вихідні, періоди профілактики, тощо, під час яких вони не можуть виконувати роботи, тобто на відповідних місцях в упорядкуваннях обов'язково мають бути пропуски. Зрозуміло, що у випадку, коли роботи не призначені конкретному виконавцю, отримаємо узагальнену задачу. Тому доцільним є розглядати лише випадок задачі із призначенням.

**Задача 4 (з вихідними).** По заданим графу  $G$ , значенню ширини  $h$ , вектору призначень  $f_i \in \{1, \dots, h\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) та множинам вихідних  $W^j, j = 1, \dots, h$ , які визначають місця, що в упорядкуванні мають бути порожніми в упорядкуванні для  $i$ -го виконавця, побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини.

Розглянемо різницю між задачами 2-4 на наступному прикладі.

*Приклад.* Нехай маємо граф  $G$ , зображений на рис. 1,  $p_1 = 2, p_i = 1 (i = 2, \dots, 7)$ .

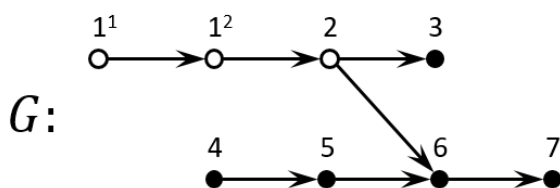


Рис. 1. Граф для прикладу демонстрації відмінностей між задачами 2-4

Для задачі 2 при  $h_i = \{2,1,2,1,2\}$  отримаємо наступне оптимальне упорядкування:

$$S_1 = \left\{ \overset{1}{4}, \overset{1^2}{5}, \overset{2}{6}, \overset{3}{7} \right\}, l(S_1) = 5.$$

Для задачі 3 при  $h = 2$  та  $f_i = \{1,1,2,2,2,2,2\}$  (на рис. 1 роботи призначені для першого виконавця зображені колами, для другого – кружками) оптимальним буде наступне упорядкування (крапками позначені вимушено порожні позиції):

$$S_2 = \left\{ \overset{1^1}{4}, \overset{1^2}{\circ}, \overset{2}{5}, \overset{\circ}{6}, \overset{\circ}{3}, \overset{\circ}{7} \right\}, l(S_2) = 6.$$

Розглянемо тепер задачу 4 при  $h = 2, W^1 = \{2\}, W^2 = \{4\}$  (відповідають  $h_i = 1$  з прикладу до задачі 2) та вектору призначень  $f_i$ , аналогічним попередній задачі, отримаємо наступне оптимальне упорядкування (хрестиками додатково позначені вихідні):

$$S_3 = \left\{ \overset{1^1}{4} \times \overset{1^2}{5}, \overset{2}{\circ}, \overset{\circ}{6}, \overset{\circ}{3}, \overset{\circ}{7} \right\}, l(S_3) = 7 \quad (1)$$

Бачимо, що в усіх випадках були отримані упорядкування різної довжини, а отже додаткові умови є суттєвими. Можна вважати, що задача з вихідними є деякою комбінацією задач 2 та 3. Варто відмітити також, що у випадку  $W^1 = \{3\}$  на третьому місці обидві позиції виявилися б порожніми, проте, з огляду на те, що вихідні є вимушеними перервами у процесі виконання робіт, довжину упорядкування, як час необхідний для виконання всіх завдань, доцільно вважати рівною 7, що суперечить вихідному означенню довжини упорядкування. В той же час додавання вихідного після 7 місця не має впливати на довжину, оскільки всі роботи на той час вже будуть виконані. Тому необхідно ввести скореговане означення для довжини упорядкування для задачі 4.

**Означення 6.** Довжиною  $l$  упорядкування  $S$  для задачі з вихідними називається число непорожніх місць та порожніх місць з вихідними, праворуч від яких є непорожні місця.

У подальшому довжину упорядкування будемо розуміти у значенні, відповідному до задачі, що розглядається, без додаткового уточнення. Також для подальших досліджень можливості розв'язання наведених задач знадобиться наступне означення.

**Означення 7.** Граничними термінами  $d_i^s, d_i^e$  для  $i$ -ої роботи називаються числа, що визначають проміжок місць, на якому може стояти відповідна вершина в упорядкуванні, де  $d_i^s$  – найменший номер місця, на якому вона може стояти, а  $d_i^e$  – найбільший.

Відомо, що при  $h = 2$  розв'язок класичної задачі може бути отриманий за поліноміальний час. Першим з алгоритмів, які дозволяють знайти оптимальне упорядкування в цьому випадку, був алгоритм, заснований на максимальному паросполученні [3]. Розглянемо, як цей алгоритм може бути модифіко-

ваний для розв'язання задачі із вихідними на прикладі графу з рис. 1 та додаткових умов з прикладу до задачі 4.

Схема алгоритму, заснованого на максимальному паросполученні

1. Для графу  $G(V,U)$  будемо неорієнтований граф  $\bar{G}(V,E)$ , де  $(i,j) \in E$ , якщо у графі  $G$  немає шляху ані прямого, ані зворотного шляху між вершинами  $i$  та  $j$ . Такий граф у подальшому будемо називати графом досяжності.

2. В отриманому графі  $\bar{G}$  знаходимо максимальне паросполучення, яке позначимо  $M \subseteq E$ , тобто підмножину ребер  $E$ , що не мають спільних вершин, з максимальною потужністю.

3. В шуканому упорядкуванні  $S^*$  вважаємо всі місця вільними і покладемо  $k = 1$ .

4. Якщо  $G$  порожній, то кінець алгоритму.

5. Можливий один з наступних випадків:

а) Серед вільних вершин графу  $G$  існує така, яка не належить жодному з ребер у  $M$ , тоді обираємо для розташування її.

б) У множині  $M$  існує таке ребро  $(i,j)$ , що вершини  $i$  та  $j$  є відкритими, тоді обираємо їх для розташування і видаляємо  $(i,j)$  з  $M$ .

в) У множині  $M$  знайдеться така пара ребер  $(i,p)$  та  $(j,q)$ , що вершини  $i$  та  $j$  є відкритими, а між вершинами  $p$  та  $q$  є ребро у графі  $\bar{G}$ , тоді для розташування обираємо вершини  $i$  та  $j$ , ребра  $(i,p)$  та  $(j,q)$  видаляємо з  $M$ , а ребро  $(p,q)$  додаємо у  $M$ .

6. Обрані вершини розташовуємо на місце  $k$  в упорядкуванні  $S^*$  та видаляємо їх з графу  $G$  разом з вихідними дугами, якщо вони є. Приймаємо  $G := G, k := k + 1$  та переходимо на 4.

Важливо зазначити, що для знаходження  $M$  для довільних неорієнтованих графів відомі алгоритми поліноміальної складності, наприклад алгоритм стиснення квіток.

Схема модифікованого алгоритму

1. Для графу  $G(V,U)$  будемо неорієнтований граф  $\bar{G}(V,E)$ , де  $(i,j) \in E$ , якщо у графі  $G$  немає ані прямого, ані зворотного шляху між вершинами  $i$  та  $j$  (граф досяжності).

2. Видаляємо з графу  $\bar{G}$  ребра, що з'єднують вершини, що відповідають роботам, які призначені різним робітникам.

3. Додаємо до графу  $\bar{G}$  вершини, що відповідають вихідним, та з'єднуємо їх також з усіма вершинами, що відповідають роботам, які призначені іншим виконавцям, та з вихідним іншого виконавця, призначеним на те ж місце в упорядкуванні, якщо він існує. Для кожної вершини вводимо граничні терміни, що відповідають місцям, які вона має займати в упорядкуванні.

4. В отриманому графі  $\bar{G}$  знаходимо максимальне паросполучення, яке позначимо  $M \subseteq E$ , тобто підмножину ребер  $E$ , що не мають спільних вершин, з максимальною потужністю.

5. В шуканому упорядкуванні  $S^*$  вважаємо всі місця вільними і покладемо  $k = 1$ .

6. Якщо  $G$  порожній, то кінець алгоритму.

7. Якщо є вихідні, які відповідають  $k$ -ому місцю, то віддаємо їм перевагу (якщо вони поодинокі) або ребрам, до яких вони відносяться.

8. Можливий один з наступних випадків:

а) Серед вільних вершин графу  $G$  існує одна чи декілька таких, що не належать жодному з ребер у  $M$ , тоді обираємо для розташування їх.

б) У множині  $M$  існує таке ребро  $(i, j)$ , що вершини  $i$  та  $j$  є відкритими, тоді обираємо їх для розташування і видаляємо  $(i, j)$  з  $M$ .

в) У множині  $M$  знайдеться така пара ребер  $(i, p)$  та  $(j, q)$ , що вершини  $i$  та  $j$  є відкритими та відповідають роботам, призначеним різним виконавцям, тоді для розташування обираємо вершини  $i$  та  $j$ , ребра  $(i, p)$  та  $(j, q)$  видаляємо з  $M$ , а ребро  $(p, q)$  додаємо у  $M$ , якщо воно є у графі  $\bar{G}$ .

г) Серед вільних вершин графу  $G$  існує одна вершина  $i$ , що не належать жодному з ребер у  $M$ , та деяка інша  $j$ , що належить деякому ребру  $(j, q)$  у  $M$ , та може бути виконана одночасно із  $i$ , тоді обираємо для розташування їх, а вершину  $q$  додаємо до поодиноких.

9. Об'єднуємо поодинокі вершини у пари, якщо між ними є ребра у графі досяжності, та додаємо отримані пари у  $M$ .

10. Обрані вершини розташовуємо на місце  $k$  в упорядкуванні  $S^*$  та видаляємо їх з графу  $G$  разом з вихідними дугами, якщо вони є. Приймаємо  $G := G, k := k + 1$  та переходимо на 4.

Відмітимо також, що додатковою мотивацією для модифікації та застосування саме алгоритму, заснованого на максимальному паросполученні, є те, що для задач 3 та 4 відповідний граф досяжності є дводольним. Це безпосередньо впливає з другого етапу алгоритму: залишаємо ребра лише між вершинам, що відповідають роботам різних виконавців. Дводольність графу досяжності в свою чергу спрощує пошук максимального паросполучення.

*Приклад розв'язання.* На першому етапі алгоритму необхідно побудувати граф досяжності (неорієнтовний граф, вершини якого з'єднані ребром, якщо у вихідному графі між ними немає орієнтовного шляху у будь-якому напрямку). Отримаємо граф  $\bar{G}_1$  з рис. 2.

Перед тим, як перейти до пошуку максимального паросполучення, згідно алгоритму, врахуємо спочатку той факт, що в шуканому упорядкуванні вершини, які відповідають роботам, що призначені різним робітникам, не можуть стояти на одному місці. Це можна зробити, видаливши з  $\bar{G}_1$  ребра, що з'єднують вершини, які призначені одному виконавцю. Таким чином ці ребра не зможуть потрапити до максимального паросполучення, а отже в отриманому за алгоритмом упорядкуванні на кожному місці зможуть знаходитись



лише вершини, що призначені різним виконавцям. Отримаємо граф  $\overline{G}_2$ , штрихові лінії позначають видалені ребра.

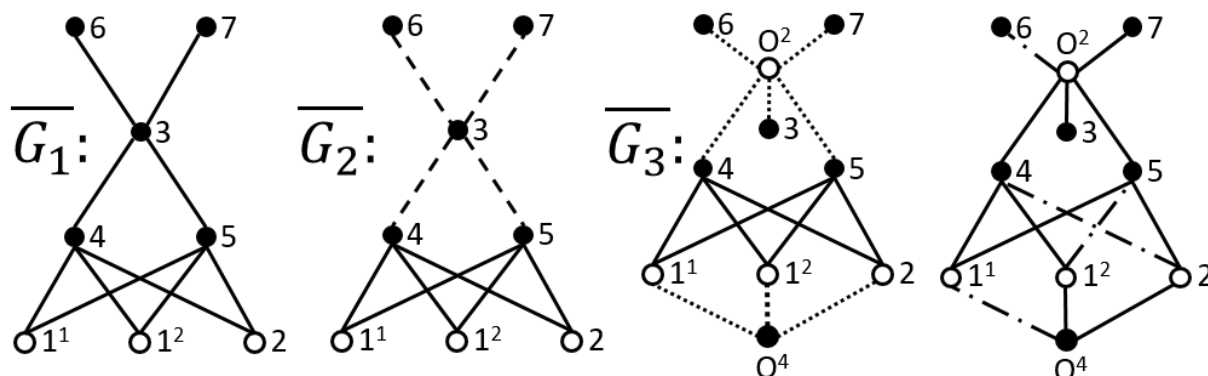


Рис. 2. Етапи перебудови графу досяжності з прикладу розв’язання задачі 4

Врахуємо тепер наявність вихідних. Додамо до вихідного графу дві ізольовані вершини  $o^2$  та  $o^4$ , які відповідають вихідним першого та другого виконавця відповідно. Для того, щоб врахувати, що вихідні призначені на конкретний день, визначимо для них граничні терміни рівні місцям в упорядкуванні, які вони мають займати. Маємо додати ці вершини також до графу досяжності разом із ребрами, що з’єднують їх з усіма вершинами, призначеними для іншого виконавця. Отримаємо граф  $\overline{G}_3$ , додані ребра позначені пунктирними лініями. Наявність граничних термінів буде врахована пізніше.

Знайдемо тепер максимальне паросполучення в графі  $\overline{G}_3$ , ним буде  $M = \{(1^1, o^4), (1^2, 5), (2, 4), (o^2, 6)\}$  (на рис. 2 зображене штрихпунктирною лінією), при цьому вершини 3 та 7 не ввійшли до жодної з пар.

Перейдемо до побудови шуканого упорядкування.

Відкритими вершинами у вихідному графі є  $1^1$  та 4, вони належать до пар  $(1^1, o^4)$  та  $(2, 4)$ , тому, відповідно до алгоритму, розташовуємо їх в упорядкуванні на перше місце:  $S[1] = \{1^1, 4\}$  та додаємо до паросполучення пару  $(2, o^4) \rightarrow M$ . Зазначимо, що вершини  $o^2$  та  $o^4$  також були відкритими, проте, відповідно, до граничних термінів вони не можуть бути розміщені на першому місці в шуканому упорядкуванні.

Відповідно до умов, у першого виконавця має бути вихідний на 2 місці, тому на цьому етапі маємо обов’язково розмістити вершину  $o^2$ , яка належить парі  $(o^2, 6)$ . Іншими відкрити вершинами є  $1^2$  та 5, які входять до однієї пара, та  $o^4$ , розміщення якої на 4 місці порушить граничні терміни. Аналогічно першому кроку об’єднаємо ці пари, тоді  $S[2] = \{o^2, 5\}$ . Проте пара  $(1^2, 6)$  не може бути додана до  $M$ , оскільки між цими вершинами немає ребра у графі  $\overline{G}_3$ , тому додамо їх до вершин без пар.

На цьому етапі відкритими є лише вершини  $1^2$  та  $o^4$ , яку не можна розмістити на 3 місці, тому можливим є лише розміщення  $S[3]=1^2$ .

На 4 місці обов'язково має бути розміщена вершина  $o^4$ , вона утворює пару із вершиною 2, що також є відкритою, тому розташовуємо їх на це місце  $S[4]=\{2, o^4\}$ , а отже всі пари з множини  $M$  були використані.

Залишається розташувати вершини без пар, отримаємо:  $S[5]=6$ ,  $S[6]=3$ ,  $S[7]=7$ . На цьому побудова упорядкування завершується.

Отже, упорядкування, отримане за модифікованим алгоритмом, збігається з оптимальним з прикладу для задачі 4.

Варто зробити наступні зауваження. По-перше, при об'єднанні пар важливо додатково слідкувати, аби на одне місце не потрапили вершини, що призначені одному виконавцю. По-друге, задачі із граничними термінами, на відміну від задач 1-4, взагалі кажучи, можуть не мати розв'язку, проте легко переконатися, що будь-який допустимий розв'язок задачі 4 задовольняє введеним граничним термінам, згідно означенню вихідного дня, а отже цей перехід є еквівалентним. По-третє, аналогічні модифікації алгоритму можуть бути застосовані до пошуку розв'язків для узагальненої задачі при  $h_i \in \{1,2\}$  та задачі з призначенням: для задачі 2 необхідно ввести ізольовані вершини з граничними термінами, які відповідають місцям з  $h_i = 1$ ; для задачі 3 достатньо лише видалити ребра у графі досяжності, що з'єднують вершини-роботи, що призначені одному виконавцю. По-третє, запропонований алгоритм має принципові відмінності від алгоритму для класичної задачі, що не дозволяють стверджувати про оптимальність упорядкування, отриманого за модифікованим алгоритмом, у загальному випадку. Справді, бачимо, що оптимальний розв'язок (1) містить лише три заповнені місця, а отже він відповідає паросполученню з 3 парами вершин, яке не є максимальним. В зв'язку з цим при розміщенні вершин на 2 місце не змогли утворити нову пару та додали вершини до поодиноких, що також суперечить алгоритму.

З усього переліченого випливає необхідність обґрунтування оптимальності модифікованого алгоритму для задачі 4.

Розглянемо, що буде відбуватися із оптимальним упорядкуванням, якщо додамо до графу ізольовані вершини, що відповідають тим завданням, які можуть виконувати обидва виконавці. Слід відмітити, що поки в оптимальному упорядкуванні лишаються місця, на яких розташовано менше двох вершин, його довжина не буде змінюватися, оскільки додані вершини завжди можна розташувати на одну з вільних позицій. Отже, після приєднання деякої кількості таких вершин отримаємо упорядкування, в якому на всіх місцях розташовано по 2 вершини. Таке упорядкування назвемо щільним.

Зрозуміло, що кількість таких вершин, необхідна для отримання щільного упорядкування, заздалегідь не відома. Проте легко побачити, що парність кількості необхідних вершин буде збігатися з парністю суми тривалостей виконання робіт та кількості вихідних. Окрім цього, якщо до графу із щільним

упорядкуванням додати парну кількість ізольованих непризначених вершин, то оптимальне упорядкування для такого графу також буде щільним, оскільки надлишкові вершини можна розмістити разом.

Зроблені зауваження дозволяють довести твердження, аналогічне теоремі про алгоритми, що точно знаходять щільні упорядкування [4], а отже для доведення оптимальності модифікованого алгоритму достатньо показати, що він знайде щільне упорядкування, якщо воно існує, яке буде відповідати максимальному паросполученню.

*Приклад.* Нехай маємо граф  $G^2$ , зображений на рис. 3,  $W^1 = \emptyset$ ,  $W^2 = \{1\}$ ,  $h = 2$ .

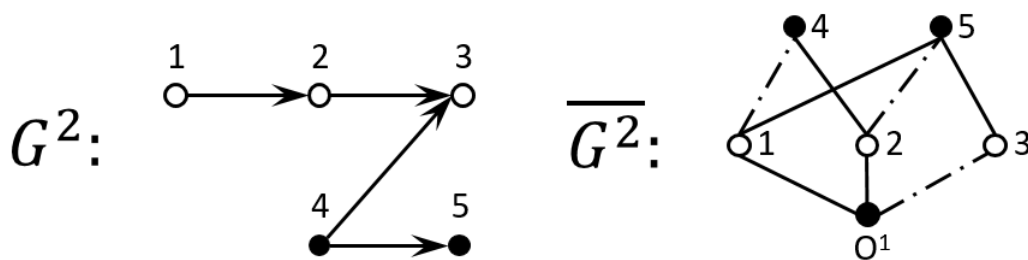


Рис. 3. Приклад застосування алгоритму для задачі з щільним упорядкуванням

Призначення робіт виконавцям, граф досяжності  $\overline{G^2}$ , отриманий за модифікованим алгоритмом, та максимальне паросполучення  $M^2 = \{(1,4), (2,5), (3, o^1)\}$  зображені на рис. 3, згідно з попередніми позначеннями.

Відповідно до алгоритму, на першому кроці маємо обов'язково розмістити вершину  $o^1$ . Вона належить до ребра  $(3, o^1)$ , в якому вершина 3 є закритою. Обидві відкриті вершини належать ребру  $(1,4)$ , тому розмітимо на перше місце в упорядкуванні пару  $S[1] = \{1, o^1\}$ , а вершини 3 та 4 вимушені додати до поодиноких, оскільки у  $\overline{G^2}$  між ними немає ребра.

На другому кроці відкритими є вершини 2 та 4, перша з яких належить до ребра  $(2,5)$ , а друга є поодинокією. Для того, аби розташувати обидві вершини на друге місце, маємо розірвати пару:  $S[2] = \{2,4\}$ . Причому дві поодинокі вершини 3 та 5 у  $\overline{G^2}$  є суміжними, а отже можемо додати це ребро до  $M^2$ .

Таким чином, на останньому кроці розташовуємо вершини, що належать ребру  $(3,5)$  на третє місце:  $S[3] = \{3,5\}$ . Вихідне упорядкування є щільним, а отже оптимальним:

$$S_4 = \left\{ \underset{\times}{1}, 2, 3, 4, 5 \right\}, l(S_4) = 3.$$

Отримане упорядкування є оптимальним, але при цьому було порушено схему класичного алгоритму. Крім того слід відмітити, що не кожне початкове максимальне паросполучення гарантує нам отримання розв'язку без порушень класичного алгоритму навіть у випадку щільного упорядкування.

Відзначимо також, що задача 4 може бути зведена до задачі 3 аналогічно тому, як задача 2 може бути зведена до задачі 1. Введемо фіктивного виконавця, призначені роботи якого утворюють ланцюжок, довжина якого дорівнює довжині оптимального упорядкування. Зрозуміло, що оптимальне упорядкування для отриманої задачі при  $h' = h + 1$  можна побудувати шляхом приєднання до кожного місця оптимального упорядкування вихідної задачі однієї вершини з доданого ланцюжка. А отже кожна вершина-робота фіктивного виконавця буде однозначно відповідати деякому місцю в оптимальному упорядкуванні. З'єднаємо тепер кожну вершину, що відповідає вихідному, вхідною дугою з вершиною ланцюжка, що відповідає попередньому місцю в упорядкуванні до вихідного, та вихідною з вершиною, що відповідає наступному місцю в упорядкуванні після вихідного. Легко впевнитись, що розширене упорядкування після введення додаткових дуг також буде допустимим та оптимальним. При цьому вершини-вихідні тепер можуть бути розташовані лише на відповідних місцях, тому можемо виключити з задачі ці обмеження. Отримана задача є прикладом задачі 3, невідому довжину оптимального упорядкування можна знайти за допомогою бінарного пошуку, оскільки шукана довжина – мінімальна довжина ланцюжка, при якій на кожному місці в отриманому упорядкуванні буде знаходитись одна вершина з доданого ланцюжка.

Тому у подальших дослідженнях увага приділялася лише задачі 3.

Насправді, можемо також взагалі не отримати оптимальне упорядкування через неоднозначність обрання пар вершин для розміщення при застосуванні алгоритму, навіть для найпростіших графів.

*Приклад.* Розглянемо задачу 3 для графів з рис. 4 та  $h = 2$ , призначення робіт визначається помітками вершин на рисунку.

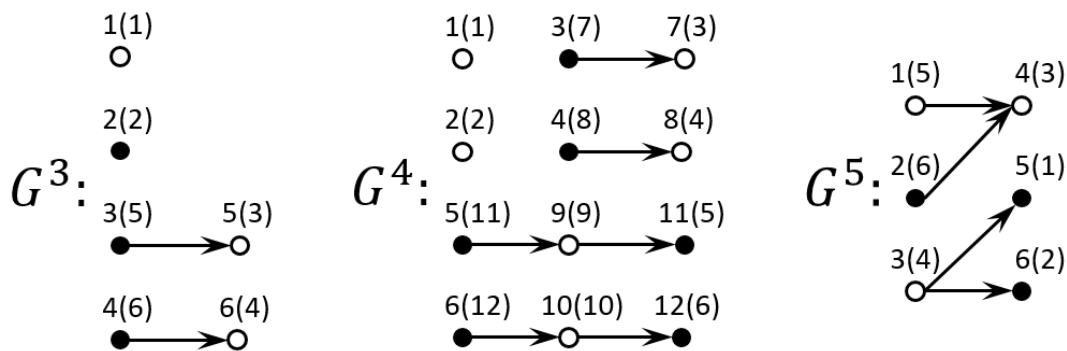


Рис. 4. Приклади неоптимальності алгоритму для задач з щільним упорядкуванням

Легко побачити, що допустимим максимальним паросполученням для графу  $G^3$  буде  $M^3 = \{(1,2), (6,3), (5,4)\}$ . Відповідно до алгоритму можемо розмістити на перше місце пару вершин  $(1,2)$ , проте тоді нерозміщеними та відкритими залишаться лише вершини 3 та 4, які не можуть бути розміщені разом, оскільки відповідають роботам, що мають бути виконані одним і тим же виконавцем. Тому зможемо розмістити лише одну з них на другому місці, на-

приклад, вершину 3. На подальших кроках алгоритму зможемо розмістити пару вершин (5,4) та вершину 6. У результаті отримаємо упорядкування:

$$S_5 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2, 3, 4, 5, 6 \\ \circ \end{array} \right\}, l(S_5) = 4.$$

Отримане упорядкування не є оптимальним. Справді, якби на першому етапі замість розміщення пари вершин (1,2) розмістили б пару (1,3) та додали до  $M^3$  нову пару (6,2), то отримали б упорядкування меншої довжини:

$$S_5^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3, 4, 2, 5, 6 \\ \circ \end{array} \right\}, l(S_5^*) = 3.$$

Отже, бачимо, що не змогли отримати оптимальний розв'язок через невдале обрання пари вершин для розміщення. Насправді, в алгоритмі немає жодних вказівок щодо пріоритетності розміщення вершин, відповідно до випадків а-г. В свою чергу для класичного алгоритму доведено, що обрання вершин для розміщення не вплине на оптимальність отриманого розв'язку.

З аналізу попереднього прикладу можна зробити припущення, що для отримання оптимального розв'язку потрібно забороняти розміщення ізольованих вершин парами, якщо у графі є інші неізольовані вершини. Таким чином матимемо вільні вершини для утворення пар на більш пізніх етапах побудови упорядкування. Виявляється, що ця умова не є достатньою для подолання проблеми неоднозначності вибору.

Перейдемо тепер до графу  $G^4$ . Максимальним паросполученням для нього буде:  $M^4 = \{(10,5), (9,6), (7,11), (8,12), (1,3), (2,4)\}$ . Бачимо, що для цього графу ізольовані вершини належать до різних пар. При застосуванні алгоритму можемо розташувати спочатку пари (1,3) та (2,4). Далі маємо можливість лише комбінувати пари: розміщуємо пари (7,5) і (8,6) та додаємо до  $M^4$  пари (10,11) і (9,12). Таким чином прийшли до підграфу та пар, що є аналогічними до попереднього прикладу. Результуюче упорядкування для цього прикладу:

$$S_6 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2, 7, 8, 9, 10 \\ 3, 4, 5, 6, \circ, 11, 12 \end{array} \right\}, l(S_6) = 7.$$

У цьому прикладі також змогли б зменшити довжину при іншому порядку розташування пар. Розпочнемо з комбінування пар (1,3) і (10,5) та (2,4) і (9,6), тоді на перші два місця будуть розміщені пари (1,5) і (2,6), а пари (10,3) і (9,4) додані до  $M^4$ . Далі розміщуємо пари, що залишились у  $M^4$ , тоді отримаємо оптимальне упорядкування:

$$S_6^* = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 5, 6, 4, 3, 11, 12 \\ 2, 9, 10, 7, 8 \end{array} \right\}, l(S_6^*) = 6.$$

Аналізуючи цей приклад, можемо дещо уточнити попереднє припущення. Побачили, що для отримання оптимального упорядкування мали спочатку розмістити вершини 5 та 6, що є початками найдовших ланцюжків у графі. В той же час при розміщенні на першому етапі вершин 3 та 4, що також є поча-

тками ланцюжків, проте коротших, отримали неоптимальне упорядкування. Ці спостереження разом з необхідністю збереження ізольованих вершин є основними положеннями рівневого принципу побудови упорядкувань [5].

Відомим алгоритмом, який використовує рівневий принцип, є алгоритм, заснований на лексикографічному поміченні вершин [6]. Він також є поліноміальним та точним для класичної задачі при  $h = 2$  за умови, що у графі немає транзитивних дуг.

Насправді, легко переконатися, що для попередніх двох прикладів за алгоритмом було б отримано оптимальне упорядкування (пріоритети вершин, отримані за алгоритмом, зазначені на рис. 4 у дужках). Проте виявляється, що можемо отримати неоптимальний розв'язок через довільність обрання міток для вершин без вихідних дуг.

Розглянемо граф  $G^5$ , нехай вершини без вихідних дуг мають наступні помітки: вершина 4 – помітку 3, вершина 5 – помітку 1, а вершина 6 – помітку 2. Відповідно до алгоритму, для вершини 1 послідовність поміток безпосередніх послідовників (3), для вершини 2 – (3), для вершини 3 – (2,1). Тоді, відповідно до лексикографічного упорядкування послідовностей, маємо  $(3) \succ (3) \succ (2,1)$ , а отже вершини 3 отримає помітку 4, вершина 2 – помітку 5, а вершина 1 – помітку 6 (отримані помітки зображені на рис. 4 у дужках). При побудові упорядкування на перше місце розмістимо вершини 1 та 2, на друге місце можемо розмістити лише вершину 3, оскільки вершини 3 та 4 відповідають роботам, що мають бути виконані одним і тим самим виконавцем; після чого розміщуємо разом вершини 4 та 5 і на останньому місці буде вершина 6. Отримаємо наступне упорядкування:

$$S_7 = \{1, 3, 4, 5, 6\}, l(S_7) = 4.$$

Аналогічно попереднім прикладам, могли б отримати коротше упорядкування, якщо б розмістили спочатку вершини 2 та 3, потім змогли б розташувати пари вершин 1 та 5 і 4 та 6. При цьому результуючим упорядкуванням було б наступне:

$$S_7^* = \{3, 5, 6\}, l(S_7^*) = 3.$$

Отже, бачимо, що обидва алгоритми є в загальному випадку лише наближеними. До переваг модифікованого алгоритму можна віднести легкість впровадження обмежень, обумовлених структурою шуканого розв'язку, а до недоліків значну невизначеність виконання кроків при побудові упорядкування. В той же час алгоритм, заснований на лексикографічному поміченні, має недоліками переваги попереднього та навпаки.

В подальшому цікавим є дослідження питання можливостей поєднання переваг розглянутих алгоритмів в одному, чисельне визначення частоти знаходження точних розв'язків алгоритмами для різних класів графів, а також пошук та обґрунтування класів графів, для яких зазначені алгоритми є точними.

### Бібліографічні посилання

1. Ullman J. D. NP-complete scheduling problems. *J. of Comput. And Syst. Sci.* 1975. P. 384–393.
2. Бурдюк В. Я., Турчина В.А. Алгоритмы параллельного упорядочения: Учебное пособие. Днепропетровск: ДГУ, 1985. 83 с.
3. Fujii, M., Kasami T., Ninomija K. Optimal sequencing of two equivalent processors. *SIAM J. Appl. Math.* 1969. № 4. P. 784–789.
4. Turchyna V., Karavaiev K. Analysis of algorithms for constructing dense sequencing of digraphs vertices. *CEUR Workshop Proceedings 2608, CEUR-WS.org.* 2020. P. 690-703.
5. Hu T.C. Parallel sequencing and assembly line problems. *Oper. Res.* 1961. P. 841–849.
6. Fujii M. Optimal sequencing of two equivalent processors. *SIAM J. Appl. Math.* 1971. № 1. P. 141–162.

Надійшла до редколегії 29.09.2022.

**Н.Л. Козакова, О.В. Черницька, П.О. Шейченко**  
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ЗАСТОСУВАННЯ ЕВРИСТИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ФОРМУВАННЯ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ БАНКУ**

Запропоновано узагальнений алгоритм формування оптимального кредитного портфеля банку за допомогою методів багатокритеріальної оптимізації із застосуванням евристичних алгоритмів. Математична модель представлена у вигляді послідовного алгоритму зведення багатокритеріальної задачі до задачі умовної оптимізації, та застосування методу штрафних функцій для послідовного розв'язання задач безумовної оптимізації. На кожному кроці запропоновано застосування евристичних алгоритмів. Вказано особливості застосування та чисельної реалізації алгоритмів.

**Ключові слова:** кредитний портфель, багатокритеріальна оптимізація, метод штрафних функцій, генетичні алгоритми.

**N.L. Kozakova, O.V. Chernytska, P.O. Sheychenko**  
*Oles Honchar Dnipro National University*

## **APPLICATION OF HEURISTIC ALGORITHMS FOR THE FORMATION OF THE BANK'S CREDIT PORTFOLIO**

Existing methods and criteria for quality assessment loan portfolios cannot always be objectively assessed and forecasted potential threats to the financial stability of banks. This is evidenced by the high the level of problem loans of Ukrainian banks. Lending is a common banking operation institutions that bring them income. This is the main reason for the development effective credit policy. Effective commercial credit policy bank must contain important elements of credit organization the bank's policies, areas of credit activity and measures that are developed depending on the specific banking institution. Qualitative credit policy will contribute to increasing profit ability and stability of the bank's activities. Considering this, the task of construction becomes urgent mathematical model of the formation of a commercial credit portfolio the bank. In this work, the most effective heuristic algorithms were used to solve the combinatorial optimization problem. The software implementation of the selected heuristics has been completed algorithms for determining the optimal solution of the given multi-criteria problem, as well as a developed decision-making system for the formation of an optimal credit portfolio.

The developed software is a decision-making system that allows the bank's expert to identify the most profitable customers, which contributes to higher profits and lower risk for the bank. During the analysis of the results of the software product, it was determined that the genetic algorithm has advantages in the running time of the program, but it gives the greatest deviation of the values of the profit and risk functions from the mathematical expectation of the general population. The particle swarm algorithm works the longest. The most effective algorithms for solving the given problem are the mimetic algorithm and the bee colony algorithm.



**Keywords:** loan portfolio, multicriterial optimization, method of penalty functions, genetic algorithms.

**Н.Л. Козакова, О.В. Черницкая, П.А. Шейченко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КРЕДИТНОГО ПОРТФЕЛЯ БАНКА**

Предложен обобщенный алгоритм формирования оптимального кредитного портфеля банка с помощью эвристических алгоритмов. Математическая модель представлена в виде алгоритма последовательного решения многокритериальной задачи, условной и безусловной задачи оптимизации. Указаны особенности применения и численной реализации алгоритмов.

**Ключевые слова:** кредитный портфель, многокритериальная оптимизация, метод штрафных функций, генетические алгоритмы.

**Вступ.** Існуючі методи та критерії оцінки якості кредитних портфелів не завжди дають можливість об'єктивно оцінити й спрогнозувати потенційні загрози фінансовій стабільності банків. Про це свідчить високий рівень проблемних кредитів банків України. Кредитування являє собою поширену операцію банківських установ, тому актуальною є задача розробки ефективної кредитної політики банку.

Задачі формування банківського портфеля присвячено багато наукових робіт. Так, в [1] побудовано математичну модель портфеля комерційного банку на основі бухгалтерського балансу з врахуванням економічних нормативів регулювання діяльності банків. Застосуванню класичної портфельної теорії для моделювання багатокритеріальної оптимізації кредитного портфеля банку в ситуації ризику неповернення позичок присвячено роботу [2]. В [3] для формування кредитного портфеля банку використано інструментарій нечіткої логіки системи Matlab.

Ми пропонуємо при розробці системи прийняття рішень для формування оптимального кредитного портфеля застосувати евристичні алгоритми.

Кожен день клієнти звертаються до відділів комерційних банків з приводу кредитування. У кожному такому відділі існує свій ліміт видачі на загальну суму кредитів за окремий період. При цьому менеджери завчасно розуміють, які кредити є більш прибутковими, а які менш прибуткові. Кожен кредит має свій ризик неповернення, і комерційний банк має це враховувати. Для клієнтів з великим відсотком ризику збільшують відсоткову ставку кредитування. Чим більш ризикований кредит, тим більш високу ставку виставляє банк і навпаки, якщо клієнт має низький відсоток ризику, він має поручителів, майно та потрібні документи, банк має зменшувати відсоткову ставку.

Дохід комерційного банку вагомо пов'язаний з ризиком кредиту. Основна задача полягає у виборі такої стратегії кредитування, щоб максимізувати дохід банку та мінімізувати ризик. Для її розв'язання потрібні експертні оцінки ризику та дані по кредитах клієнтів.

Поставлена задача відноситься до класу задач багатокритеріальної умовної оптимізації з обмеженнями на суму кредитів. Алгоритм розв'язання цієї задачі теорії прийняття рішень полягає у послідовному застосуванні методу зведення її до задачі однокритеріальної оптимізації та методу штрафних функцій для зведення до задачі безумовної оптимізації. Для розв'язання задачі безумовної оптимізації запропоновано застосування таких евристичних алгоритмів: генетичний, міметичний, бджолиного рою та рою частинок.

**Постановка задачі.** Припускається, що задана деяка скінченна кількість  $N$  позичальників кредитів банку. Введемо у розгляд вектор булевих змінних  $x = x_1, x_2, \dots, x_N$ ,  $x_j \in 0, 1$ ,  $j = \overline{1, N}$ , де  $x_j = 1$  у разі видачі  $j$ -му позичальнику кредиту у сумі  $k_j$ , інакше  $x_j = 0$ . Нехай відомі такі значення:  $t_j$  – термін, на який  $j$ -ий позичальник бере кредит;  $d_j$  – відсоток за користування  $j$ -им кредитом (не передбачається, що відсотки сплачуються одноразово з поверненням кредиту) та  $P_j$  – ймовірність невиконання позичальником обов'язків щодо повернення кредиту і відсотків  $k_j(1 + d_j t_j)x_j$ . В даній постановці передбачається два варіанти обслуговування боргу позичальником: 100% повернення разом з відсотками за встановлений термін або повна відсутність платежів за даним кредитом.

Визначимо множину допустимих розв'язків задачі як

$$D = \left\{ x \mid x_j \in 0, 1, j = \overline{1, N}; g(x) = \sum_{j=1}^N k_j x_j - F \leq 0, \sum_{j=1}^N x_j \neq 0 \right\},$$

де  $F$  – сума вільних пасивів, які має банк в даний момент.

Розглянемо двокритеріальну задачу оптимізації очікуваних відсотків від комбінацій кредитних заявок (тобто доходу)

$$E(x) = \sum_{j=1}^N k_j (1 + d_j t_j) x_j \quad (1)$$

та сумарний ризик кредитного портфелю

$$R(x) = \frac{1}{\sum_{j=1}^N x_j} \sum_{j=1}^N P_j k_j (1 + d_j t_j) x_j \quad (2)$$

з такими критеріями

$$\begin{cases} E(x) \rightarrow \max, \\ R(x) \rightarrow \min, \\ x \in D. \end{cases} \quad (3)$$

Областю компромісів називається підмножина допустимої множини рішень, що володіє тією властивістю, що всі належні їй рішення не можуть бути покращені одночасно за всіма локальними критеріями [4].

Оптимальне рішення, яке обирається на основі багатокритеріального підходу, незалежно від принципу оптимальності, що обирається, завжди має

належати області компромісів. Інакше воно може бути покращене і, отже, не є оптимальним. Таким чином, область компромісів є областю потенційно оптимальних компромісів. Звідси випливає, що при виборі рішення за векторного критерію ефективності можна обмежити пошук оптимального рішення областю компромісів, яка, як правило, значно менше всієї області можливих рішень. Необхідно знайти компромісне рішення  $x^*$ .

**Методи розв'язання.** Метод лінійної згортки критеріїв є найвідомішим і найпоширенішим при вирішенні прикладних багатокритеріальних задач оптимізації. Він полягає в призначення тим чи іншим способом коефіцієнтів у лінійній згортці (лінійної комбінації) вихідних критеріїв та наступної її екстремізації на безлічі допустимих варіантів. Згідно з цим методом знайдене таким способом рішення вважається "найкращим". Умовою успішного використання лінійної згортки є приведення критеріїв до певної єдиної шкали, тобто нормалізація критеріїв. Найбільш поширеним перетворенням цього типу є заміна вихідних критеріїв (1), (2) на критерії виду [4]:

$$\tilde{E}(x) = \frac{E^{\max}(x) - E(x)}{E^{\max}(x)}, \quad \tilde{R}(x) = \frac{R(x) - R^{\min}(x)}{R^{\min}(x)},$$

де  $E^{\max}(x)$  та  $R^{\min}(x)$  – максимальне і мінімальне значення функції (1), (2) на множині  $D$  за умови їх існування.

Після нормалізації критеріїв (1) – (2) використовуємо значення коефіцієнтів лінійної згортки  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , які запропоновані особою, що приймає рішення, для формування суперкритерію

$$S(x) = \lambda_1 \tilde{R}(x) + \lambda_2 (-\tilde{E}(x)).$$

Отже, задачу (3) зведено до задачі

$$S(x) \rightarrow \min, \quad (4)$$

з обмеженням

$$g(x) = \sum_{j=1}^N k_j x_j - F \leq 0. \quad (5)$$

Для переходу від задачі умовної оптимізації із обмеженнями до задачі безумовної оптимізації доцільно застосувати метод штрафних функцій, в яких оптимум апроксимується зовні.

Метод зовнішньої точки (метод штрафів) розв'язання задачі (4) – (5) полягає в заміні цієї задачі послідовністю задач безумовної мінімізації функцій

$$S_k = S(x) + P(x, r_k). \quad (6)$$

**Означення.** Послідовність функцій  $P(x, r_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  називається штрафною функцією множини  $D$  (зовнішньою штрафною функцією), якщо

- 1) Функції  $P(x, r_k)$  визначені і невід'ємні в усіх внутрішніх точках допустимої множини  $D$ ;

$$2) \lim_{k \rightarrow +\infty} P(x, r_k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in D, \\ +\infty, & \text{якщо } x \notin D. \end{cases}$$

**Теорема про збіжність [5].** Нехай цільова функція  $S(x)$  є неперервною, а штрафна функція має такі властивості:

- 1)  $P(x, r_k)$  неперервна по змінним  $x$  та  $r_k$  і  $P(x, r_k) = 0$  при  $x \in D$ ;
- 2)  $P(x, r_k)$  монотонно зростає із зростанням  $r_k$ ;
- 3) для довільної сталої  $C$  множина  $X_C = \{x \in E^n : S_k(x) \leq C\}$  є обмеженою.

Тоді:

- 1) функція  $S_k$  досягає на  $E^n$  свого мінімуму  $S_k^*$  в деякій точці  $x_k^*$ , при цьому  $S_k^* \leq S_*$ , де  $S_* = \min_{x \in D} S(x)$  і  $S_k^* \rightarrow S_*$ ;
- 2) будь-яка гранична точка  $x^*$  послідовності  $x_k^*$  при  $r_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$  є точкою мінімуму функції  $S(x)$  на множині  $D$ , вся послідовність  $x_k^*$  збігається до  $x^*$ .

Штрафну функцію можна будувати різними способами. Було обрано функцією штрафу

$$P(x, r_k) = r_k \cdot (g^+(x))^2,$$

де

$$g^+(x) = \max(g(x), 0).$$

*Алгоритм методу зовнішньої точки.*

Початковий етап. Задати точку  $x^{(1)} \in E^n$ , штрафний параметр  $r_1 = 1$  і число  $\beta = 10$ . Вибрати  $\varepsilon > 0$  як константу зупинки. Покласти  $k = 1$  та перейти до основного етапу.

Основний етап. Крок 1. При початковій точці  $x^{(k)}$  розв'язати таку задачу безумовної оптимізації:

$$S_k = S(x) + P(x, r_k) \rightarrow \min.$$

Покласти  $x^{(k+1)}$  таким, що дорівнює оптимальному розв'язку цієї задачі і перейти до кроку 2.

Крок 2. Якщо  $P(x, r_k) \leq \varepsilon$ , то зупинитися, у протилежному випадку покласти  $r_{k+1} = \beta \cdot r_k$ , замінити  $k$  на  $k + 1$  та перейти до кроку 1.

Алгоритм описаний.

Для розв'язання задачі (6) на кожному кроці ітераційного процесу були застосовані евристичні алгоритми, а саме: генетичний, бджолиний, міметичний та рою частинок [6]. Блок-схеми застосованих алгоритмів наведені на рис. 1–4.

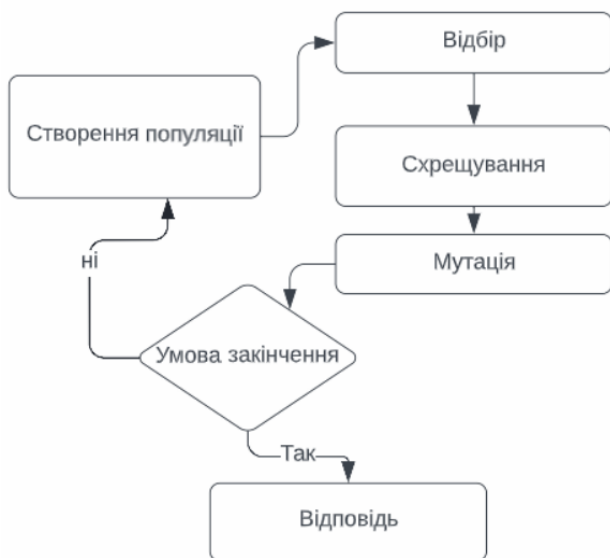


Рис. 1. Блок-схема генетичного алгоритму



Рис. 2. Блок-схема міметичного алгоритму



Рис. 3. Блок-схема алгоритму рою частинок

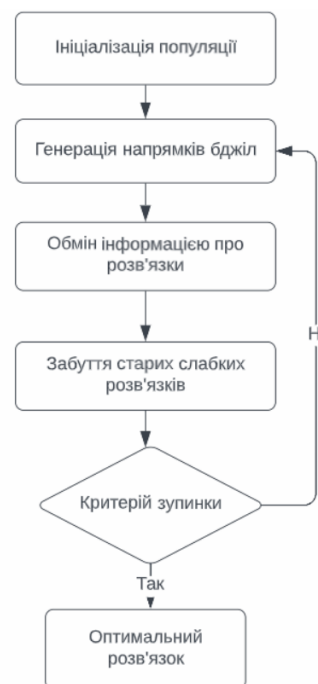


Рис. 4. Блок-схема бджолиного алгоритму

**Програмна реалізація.** Програмне забезпечення, що реалізує розроблений алгоритм, було створене за допомогою мови програмування C# із застосуванням фреймворку Window Forms [7]. Таке рішення зумовлено тим, що на даний момент C# є розповсюдженою мовою програмування, і це дає змогу розробникам створювати зручні додатки для побудови графіків, таблиць та іншого візуального відображення.

Для створення програмного забезпечення були використані такі допоміжні елементи як:

- label: об'єкт-напис;
- dataGridView: об'єкт, який потрібен для запису, відображення і зберігання наших даних, за своєю структурою є таблицею;

- `tabPanel`: об'єкт, який зберігає в собі список `tabControl`-об'єктів, що являють собою вкладення на веб-сторінці;
- `openFileDialog`: об'єкт, який не бачить користувач, але він відіграє важливу роль, за допомогою нього користувач може завантажувати дані з excel файлу;
- `numericDown`: об'єкт для запису числових даних, являє собою лічильник, в якому можна обирати числові дані;
- `comboBox`: об'єкт для зберігання текстових даних у впорядкованому списку;
- `chart`: область для відображення графіків в Windows Forms.

Усі допоміжні об'єкти можна знайти на спеціальній панелі `ToolBox` середовища `Visual Studio`. Проект складається з класів: `Algorithm`, `GeneticAlgorithm`, `MemeticAlgorithm`, `PSOAlgorithm`, `BeeAlgorithm`, `Bee`, `TabuSearch` та основного класу відображення користувацького інтерфейсу – `Form1`.

Абстрактний клас `Algorithm` – засновник всіх інших класів, які відповідають за реалізацію евристичних алгоритмів. Він містить поля, які відповідають за популяцію, за дані клієнтів, а також реалізує метод виконання самого алгоритму знаходження оптимального значення цільової функції `Run()`.

Класи `GeneticAlgorithm`, `MemeticAlgorithm`, `PSOAlgorithm`, `BeeAlgorithm` – відповідають за реалізацію генетичного, міметичного, рою частинок і бджолиного алгоритмів, всі ці класи наслідуються від одного абстрактного класу `Algorithm`, що дає можливість реалізувати більш гнучке для розширення програмне забезпечення.

Клас `Bee` являє собою клас бджоли, зберігає в собі дані про розв'язок та реалізує метод переміщення, тобто пошуку в околі заданого розв'язку.

Клас `TabuSearch` – це один із методів детермінованого локального пошуку.

**Інтерфейс користувача.** Головною метою створення програмного забезпечення є знаходження оптимального набору клієнтів для формування кредитного портфелю банку.

Користувач створює таблицю для заповнення даних. Для цього він має спочатку ввести значення кількості клієнтів банку та їх дані. Задає значення параметрів задачі. Програма надає можливість завантаження вхідних даних з Excel- файлу. В результаті отримуємо заповнену таблицю.

На наступному кроці користувач задає значення коефіцієнтів згортки для формування суперкритерію. За замовчуванням їх значення  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$ .

Далі застосовуються алгоритми розв'язання задачі (4) – (5). Для кожного алгоритму відведена окрема кнопка для вибору користувачем алгоритму. Результати можна переглянути у більш розгорнутому вигляді за допомогою вкладки «Графік, результати», що наведено на рис. 5 – 6.

CA:\Users\MSI\source\repos\FormationLoanPortfolio\example1.xlsx

Дані клієнтів    Графіки, результати

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
k <sub>j</sub>	30	45	28	80	36	57	46	30	25	65	75
t <sub>j</sub>	1	2	1	3	1,5	2	2	1,5	1	2	2
P <sub>j</sub>	0,1	0,3	0,25	0,45	0,33	0,4	0,33	0,25	0,25	0,33	0,33
d <sub>j</sub>	0,07	0,095	0,075	0,095	0,08	0,095	0,1	0,09	0,085	0,095	0,1
Імена клієн...	Шатохін К...	Джуготра...	Леоненю Т...	Переверзєв...	Фокіна Кат...	Швець Ма...	Глухання...	Шейченко ...	Кузьмін Ол...	Шевчук Ро...	Шев...
F	650										
Алгоритм ...	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Міметичн...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Бджолини...	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
Генетични...	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1

Введіть кількість клієнтів: 0

a2: 0,00    Ризик    a1: 0,00    Дохідність

Завантажити з Excel файлу    Побудувати таблицю

Рис. 5. Результати роботи програмного продукту

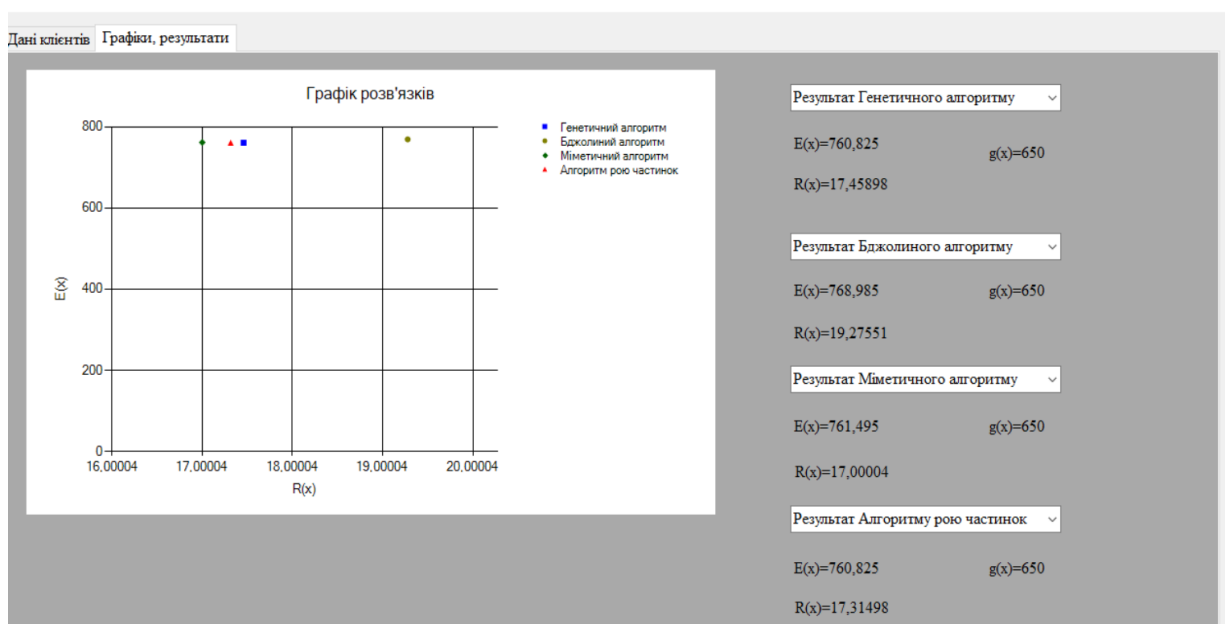


Рис. 6. Графік значень функцій доходу та ризику

**Аналіз результатів.** За допомогою розробленого програмного продукту було проведено експерименти. Результати роботи обраних евристичних алгоритмів наведено у табл. 1.

За статистичним аналізом отриманих даних виявлено, що найбільше відхилення значень функцій прибутку та ризику від математичного сподівання генеральної сукупності мають результати генетичного алгоритму.

Генетичний алгоритм має переваги у часі роботи програми. Найдовше працює алгоритм рою частинок.

Отже, виходячи з даних досліджень можна зробити висновок, що найбільш ефективними евристичними алгоритмами для побудови оптимального кредитного портфелю банку є міметичний та бджолиний алгоритми.

## Результати тестування програми

	Назва алгоритму	$E^*(x)$	$R^*(x)$	Час роботи програми, (мс)
Тест 1	Генетичний	759,635	17,3319	343
	Бджолиний	766,99	19,789	10518
	Міметичний	633,085	17,5718	5151
	Рою частинок	764,4	19,036	7851
Тест 2	Генетичний	765	18,8165	3509
	Бджолиний	759,865	17,0413	588
	Міметичний	762,55	17,665	1208
	Рою частинок	755,685	15,405	42188
Тест 3	Генетичний	544,695	15,135	5488
	Бджолиний	765,67	18,9741	10104
	Міметичний	762,55	17,665	4607
	Рою частинок	755,548	16,2039	8835
Тест 4	Генетичний	650,28	20,78	5341
	Бджолиний	764,19	19,058	10026
	Міметичний	777,55	17,0559	5461
	Рою частинок	766,05	18,322	13163

**Висновки.** Розроблене програмне забезпечення є системою прийняття рішень, яка дозволяє експерту банку визначити найбільш вигідних клієнтів, що сприяє більшому прибутку та меншому ризику банку. Під час аналізу результатів роботи програмного продукту було визначено, що найбільш ефективними алгоритмами для розв'язання поставленої задачі є міметичний та алгоритм колонії бджіл.

## Бібліографічні посилання

1. Галіцин В.К., Козак О.Ю. Повна математична модель банківського портфеля. *Академічний огляд*. 2011. № 2 (35). С. 79–85.
2. Харченко Ю.А. Моделювання багатокритеріальної оптимізації кредитного портфеля банку. *Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету*. 2021. № 47. С. 78–84.
3. Вітлінський В., Середюк В. Застосування інструментарію нечіткої логіки при формуванні кредитного портфеля. *Вісник КНТЕУ*. 2012. № 1. С. 106–117.
4. Волошин О. Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. 336 с. 2010.
5. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Черкаси, 2005. 608 с.
6. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. Київ: Київський національний університет імені Т.Г. Шевченка, 2016. 133 с.
7. Шилдт Г. С# 4.0 The Complete Reference. М.: «Вільямс», 2011. 1056 с.

Надійшла до редколегії 07.10.2022.



**Д.В. Красношапка, К.Є. Золотко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

**МОДЕЛЮВАННЯ УПРАВЛІННЯ СОНЯЧНИМ  
ВИПРОМІНЮВАННЯМ З ВИКОРИСТАННЯМ ОРБІТАЛЬНИХ  
ДЗЕРКАЛ З УРАХУВАННЯМ ЗАЛЕЖНОСТІ АЛЬБЕДО ЗЕМЛІ  
ВІД ТЕМПЕРАТУРИ**

Проведено моделювання управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo Землі від температури. Було визначено, що урахування залежності альbedo Землі від температури має незначний вплив на площу орбітальних дзеркал, необхідну для зниження середньої температури поверхні Землі і компенсації глобального потепління. Також урахування залежності альbedo Землі від температури майже не змінює час досягнення рівноважної температури поверхні Землі при використанні методу управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал.

Ключові слова: альbedo Землі, глобальне потепління, методи управління сонячним випромінюванням, орбітальні дзеркала, модель енергетичного балансу Землі.

**D.V. Krasnoshapka, K.Y. Zolotko**

*Oles Honchar Dnipro National University*

**SIMULATION OF SOLAR RADIATION CONTROL USING ORBITAL  
MIRRORS TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF THE  
EARTH'S ALBEDO ON TEMPERATURE**

Modeling of solar radiation control using orbital mirrors considering the dependence of the Earth's albedo on temperature was carried out. In the previous work, an analysis of the method of controlling solar radiation using orbital mirrors was carried out, in particular, the area of orbital mirrors needed to compensate for global warming was determined, and the dynamics of the Earth's surface temperature when using this method was found. In this study, for the sake of simplicity, it was assumed that the albedo of the Earth does not depend on temperature, although such a dependence exists within certain limits of temperature values. Many studies indicate a very strong influence of such dependence on the behavior of the Earth's climate as a dynamic system and leads to the occurrence of bifurcation. It is important to conduct a more accurate simulation of solar radiation control using orbital mirrors, considering the dependence of the planet's albedo on the surface temperature. It was determined that considering the dependence of the Earth's albedo on temperature has a negligible effect on the area of orbital mirrors, which is necessary to reduce the average temperature of the Earth's surface and compensate for global warming. If we take the height of the orbit of the mirrors to be 400 km, then the value of  $n = 0.39$  and the area of the orbital mirrors without taking into account the dependence of the albedo of the planet on the surface temperature is  $4.59 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$  and taking into account:  $S_m = 4.20 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$ , that is, the area of the mirrors decreases by 8%. Also, considering the dependence of the Earth's albedo on temperature almost does not change the time it takes to reach the equi

librium temperature of the Earth's surface when using the solar radiation control method using orbital mirrors. It was determined that the time during which the temperature of the Earth's surface becomes balanced after the start of the orbital mirrors, considering the dependence of the planet's albedo on temperature, is practically no different from the similar time calculated without such consideration and is approximately 14-15 days. This study was conducted for a temperature close to the current value of the global average temperature of the Earth. It is of interest to model the control of solar radiation using orbital mirrors, considering the dependence of the Earth's albedo on temperature for a much wider range of temperatures.

**Key words:** Earth's albedo, global warming, solar radiation management methods, orbital mirrors, Earth's energy balance model.

**Д.В. Красношапка, К.Е. Золотько**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ СОЛНЕЧНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТАЛЬНЫХ ЗЕРКАЛ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ АЛЬБЕДО ЗЕМЛИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

Произведено моделирование управления солнечным излучением с использованием орбитальных зеркал с учетом зависимости альбедо Земли от температуры. Было определено, что учет зависимости альбедо Земли от температуры оказывает незначительное влияние на площадь орбитальных зеркал, необходимую для снижения средней температуры поверхности Земли и компенсации глобального потепления. Также учет зависимости альбедо Земли от температуры почти не изменяет время достижения равновесной температуры поверхности Земли при использовании метода управления солнечным излучением с использованием орбитальных зеркал.

**Ключевые слова:** альбедо Земли, глобальное потепление, методы управления солнечным излучением, орбитальные зеркала, модель энергетического баланса Земли.

**Вступ.** Індустріалізація у глобальному масштабі крім очевидних переваг для людства принесла також і деякі суттєві проблеми, серед яких однією із найважливіших є глобальне потепління. Масштабні викиди парникових газів промисловістю і спричинений ними так званий парниковий ефект призвели до того, що, наприклад, уже у 2017 році середня глобальна температура на поверхні Землі була приблизно на 1,1 °С вищою, порівняно із доіндустріальним рівнем (тобто середньорічною температурою у 1850–1900 роках) [1]. Подальше підвищення температури призведе до зниження виробництва у сільському господарстві [2], нестачі води для мільйонів людей у багатьох регіонах [3], негативні зміни у таких екосистемах як арктична тундра та ліси Амазонки [4], збільшення кількості лісових пожеж у всьому світі [5] та до інших наслідків.

Очевидно головним напрямком боротьби з глобальним потеплінням є зменшення викидів парникових газів. Тому міжурядова група експертів з питань змін клімату (Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC) «Глобальне потепління на 1,5 °С запропоувала обмежити потепління на рівні 1,5 °С шляхом скорочення глобальних викидів діоксиду вуглецю (CO<sub>2</sub>) на 45 % до 2030 року порівняно з 2010 роком і зведення їх до нуля до 2050 року [6]. Нажаль останні події у світі, насамперед, військова агресія Російської феде-

рації проти України і її наслідки, показують, що досягнення цієї мети малої-мовірно, через збільшення витрат розвинених країн на оборону, допомогу біженцям, субсидії на електроенергію та витрати на доставку [7]. Тому важливе значення набувають альтернативні способи боротьби проти глобального потепління, наприклад, так зване управління сонячним випромінюванням (solar climate intervention або solar radiation modification) і конкретно один із його варіантів - використання орбітальних дзеркал або скорочено - космічні методи (space-based methods).

В роботі [8] проведено аналіз методу управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал, зокрема, визначено площу орбітальних дзеркал, необхідну для компенсації глобального потепління, знайдено динаміку температури поверхні Землі при використанні даного методу. У даному дослідженні для спрощення припускалося, що альbedo Землі не залежить від температури, хоча така залежність існує у певних межах значень температури. Багато досліджень вказують на дуже сильний вплив такої залежності на характер поведінки клімату Землі як динамічної системи і призводить до виникнення біфуркації [9, 10]. Представляється важливим провести більш точне моделювання управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo планети від температури поверхні.

**Постановка задачі.** Модель енергетичного балансу Землі з урахуванням того, що альbedo Землі залежить від температури, можна представити таким чином:

$$C_E \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \alpha_p(T)) \frac{S_0}{4} - A \uparrow \quad (1)$$

де  $C_E$  - ефективна теплоємність середовища (вимірюється у Дж/м<sup>2</sup>К<sup>-1</sup>),  $T_s$  - температура поверхні,  $t$  - час,  $\alpha_p$  - альbedo планети,  $S_0$  - сонячна стала і  $A \uparrow$  - загальна кількість енергії, що випромінює 1 м<sup>2</sup> поверхні Землі.

Залежність альbedo планети від температури поверхні можна виразити так [9]:

$$\alpha(T) = 0.5 + 0.2 \tanh(0.1(265 - T)) \quad (2)$$

Загальну кількість енергії, яку випромінює 1 м<sup>2</sup> поверхні Землі знаходимо за законом Стефана-Больцмана, при цьому враховуючи інфрачервону прозорість атмосфери  $\tau$  :

$$A \uparrow = \varepsilon \sigma T_s^4 \tau \quad (3)$$

де  $\sigma$  - стала Стефана-Больцмана,  $\varepsilon$  - випромінювальна здатність поверхні.

З (1), (2) і (3) модель енергетичного балансу Землі набуде такого вигляду:

$$C_E \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - 0.5 - 0.2 \tanh(0.1(265 - T))) \frac{S_0}{4} - \varepsilon \sigma T_s^4 \tau \quad (4)$$

Необхідно визначити наскільки впливає залежність альbedo планети від температури поверхні на значення площі орбітальних дзеркал, необхідних

для компенсації глобального потепління і динаміку температури Землі при використанні орбітальних дзеркал.

**Визначення площі орбітальних дзеркал із врахуванням залежності альbedo планети від температури поверхні.** Згідно [8] сонячну сталу можна знайти за виразом:

$$S_0 = \frac{4\varepsilon\sigma T^4\tau}{1-\alpha_p} \quad (5)$$

Для зниження глобальної середньої температури на  $T_2^* - T_1^*$ , де  $T_1^*$  - поточна глобальна середня температура,  $T_2^*$  - глобальна середня температура доіндустріального рівня, з урахуванням залежності альbedo планети від температури поверхні (2), треба зменшити потужність сонячного випромінювання на:

$$S_{0_2} - S_{0_1} = \frac{4\varepsilon\sigma\tau}{1-\alpha_p} (T_2^{*4} - T_1^{*4}) \quad (6)$$

де  $S_{0_1}$  - потужність сонячного випромінювання без використання дзеркал, а  $S_{0_2}$  - потужність сонячного випромінювання з використанням дзеркал.

З урахуванням залежності альbedo планети від температури поверхні (2):

$$S_{0_2} - S_{0_1} = 4\varepsilon\sigma\tau \left( \frac{T_2^{*4}}{1-0.5-0.2\tanh(0.1(265-T_2^*))} - \frac{T_1^{*4}}{1-0.5-0.2\tanh(0.1(265-T_1^*))} \right)$$

Знайдемо відносну величину зменшення потужності сонячного випромінювання, достатнє для зниження глобальної середньої температури на 1 градус (для досягнення глобальної температури доіндустріального рівня):

$$A = \frac{S_{0_2} - S_{0_1}}{S_{0_1}} \quad (8)$$

Використовуючи глобальну середню температуру 15.4° С [10], або  $T=15.4$  К, випромінювальну здатність поверхні  $\varepsilon=0.97$  і значення  $\tau=0.64$ , маємо відносну величину зменшення потужності сонячного випромінювання  $A=-0.0127$ , тобто необхідно зменшити потужність на 1.27%.

Порівнюючи це значення із значенням, розрахованим без урахування залежності альbedo планети від температури поверхні  $\alpha(T) - A=1.41\%$  [8], можна констатувати, що врахування  $\alpha(T)$  дещо знижує вимоги до необхідного зменшення потужності сонячного випромінювання.

Площа орбітальних дзеркал знаходиться таким чином:

$$S_m = \frac{\pi R_E^2 A}{n} \quad (9)$$

де  $R_E=6371000$  м середній радіус Землі,  $n$  - величина, яка показує яку частину довжини орбіти дзеркало відкидає тінь на Землю [8].

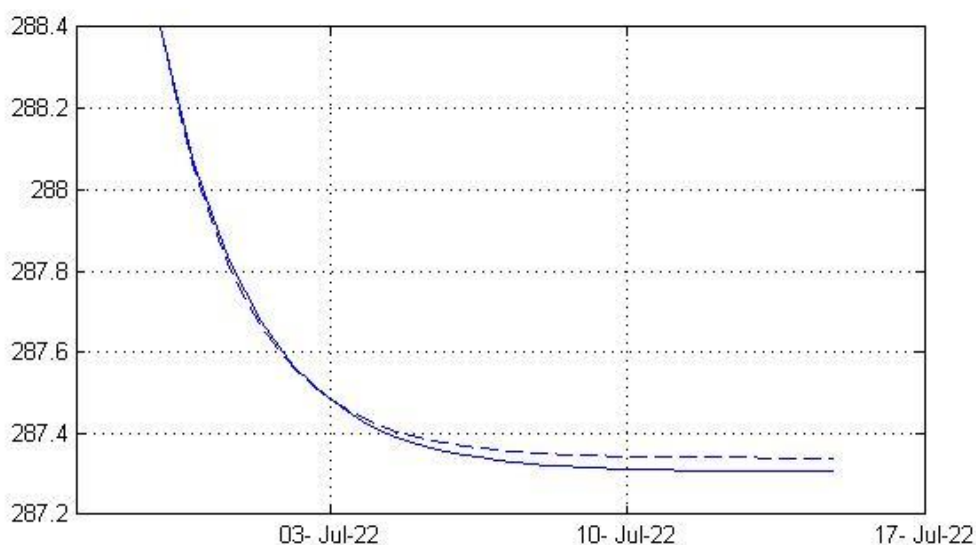
Якщо взяти висоту орбіти дзеркал 400 км то величина  $n = 0.39$  і площа орбітальних дзеркал без урахування залежності альbedo планети від температури поверхні  $4.59 \cdot 10^{12}$  м<sup>2</sup>, а з урахуванням:  $S_m=4.20 \cdot 10^{12}$  м<sup>2</sup>, тобто площа дзеркал зменшується на 8%. Таким чином, врахування залежності альbedo

планети від температури поверхні незначним чином зменшує площу дзеркал, яку треба вивести на орбіту, для зниження глобальної температури Землі до доіндустріального рівня.

**Вплив залежності альbedo планети від температури поверхні Землі на динаміку температури при використанні орбітальних дзеркал.** Як було зазначено у [8], у разі використання методу управління сонячним випромінюванням шляхом розміщення орбітальних дзеркал рівноважна температура Землі устанавлюється не миттєво через велике значення теплоємності середовища поверхні суші і океану. Обчислення показали, що для досягнення рівноважної температури поверхні Землі від моменту розміщення дзеркал на орбіті проходить близько 15 діб. Представляє інтерес визначити, як впливає на цей час врахування залежності альbedo планети від температури поверхні Землі. Для визначення часу досягнення рівноважної температури треба взяти рівняння моделі енергетичного балансу Землі (4).

Розрахунки та отримування інфографіки були проведені з використанням мови програмування високого рівня GNU Octave. Величина ефективної теплоємності середовища дорівнювала  $C_E = 2.08 \cdot 10^8$  Дж/м<sup>2</sup>К<sup>-1</sup> [11].

На рис. 1. зображено графік залежності температури поверхні Землі від часу після використання орбітальних дзеркал із врахуванням залежності альbedo планети від температури поверхні Землі – суцільна лінія і без такого врахування – пунктирна лінія.



**Рис. 1. Динаміка температури поверхні Землі при використанні орбітальних дзеркал з урахуванням та без урахування залежності альbedo планети від температури поверхні Землі**

Як суцільна, так і пунктирна лінія виходять на горизонтальну ділянку приблизно за 14-15 діб після початку падіння температури.

Таким чином, графіки показують, що урахування залежності альbedo планети слабо впливає на динаміку зміни температури Землі при використанні орбітальних дзеркал.

**Аналіз одержаних результатів та висновки.** В даній роботі проведено моделювання управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo Землі від температури. Було встановлено, що врахування залежності альbedo планети від температури поверхні зменшує площу дзеркал, яку треба вивести на орбіту, для зниження глобальної температури Землі до доіндустріального рівня на 8%.

Визначено, що час, за який температура поверхні Землі стає врівноваженою після початку дії орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo планети від температури практично не відрізняється від аналогічного часу, обчисленого без такого урахування і становить приблизно 14-15 діб.

Дане дослідження було проведено для температури, близької до поточного значення глобальної середньої температури Землі. Представляє інтерес зробити моделювання управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo Землі від температури для значно ширшого діапазону температур.

#### Бібліографічні посилання

1. Chao, Q., & Feng, A. (2018). Scientific basis of climate change and its response. *Global Energy Interconnection*, 1(4), 420-427.
2. Nelson G.C., Valin H., Sands R.D., et al. Climate change effects on agriculture: Economic responses to biophysical shocks *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 111 (9) (2014), p. 3274.
3. Gosling S.N., Arnell N.W. A global assessment of the impact of climate change on water scarcity *Climatic Change*, 134 (3) (2016), pp. 371-385.
4. *Climate Change 2014: Synthesis Report* Core Writing Team, R.K. Pachauri, L.A. Meyer (Eds.), Contribution of Working Groups I, II and III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC, Geneva, Switzerland (2014), p. 151.
5. Jolly W.M., Cochrane M.A., Freeborn P.H., et al. Climate-induced variations in global wild-fire danger from 1979 to 2013 *Nature Communications*, 6 (2015), pp. 7537-7547.
6. IPCC, 2018: Global warming of 1.5°C. An IPCC Special Report on the impacts of global warming of 1.5°C above pre-industrial levels and related global greenhouse gas emission pathways, in the context of strengthening the global response to the threat of climate change, sustainable development, and efforts to eradicate poverty [V. Masson-Delmotte, P. Zhai, H. O. Pörtner, D. Roberts, J. Skea, P.R. Shukla, A. Pirani, W. Moufouma-Okia, C. Péan, R. Pidcock, S. Connors, J. B. R. Matthews, Y. Chen, X. Zhou, M. I. Gomis, E. Lonnoy, T. Maycock, M. Tignor, T. Waterfield (eds.)]. In Press.
7. Edgecliffe-Johnson, Andrew and Neville, Sarah. "Bill Gates warns Ukraine war is sapping Europe's foreign aid budgets" *Financial Times*, September 13. 2022.
8. Красношарпа Д.В., Золотко К.Є. Аналіз методу управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2021. Вип. 21. С. 146-152.
9. Kaper H., Engler H. *Mathematics and Climate*. Philadelphia, PA: SIAM, 2013.
10. Walsh J., Oberlin C. *Climate models and differential equations. Joint Meetings*. Baltimore, Режим доступу: [http://sigmaa.maa.org/em/USE\\_Math\\_2014/Walsh-ODEclimate.pdf](http://sigmaa.maa.org/em/USE_Math_2014/Walsh-ODEclimate.pdf).
11. Mann M.E. Why Global Warming Will Cross a Dangerous Threshold in 2036. *Scientific American*. 310, 4, April 2014.

Надійшла до редколегії 01.09. 2022.

**О.С. Магас***Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара***КОНСТРУЮВАННЯ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ  
РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ З НЕЛІНІЙНИМ  
ЕЛІПТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ**

Розглянута задача ідентифікації властивостей деформованої системи, що описується нелінійним еліптичним оператором. Для цього випадку використовується варіаційна постановка задачі у поєднанні із чисельними методами оптимізації. Основним напрямком роботи є не тільки пошук наближеного розв'язку із використанням нейромережевого підходу, а ще й отримання простих архітектур нейронних мереж із мінімальною кількістю компонентів. Для досягнення цієї мети запропоновані модифікації до генетичного алгоритму конструювання нейронних мереж NEAT. Модифікований варіант цього алгоритму було застосовано для ідентифікації декількох типових моделей навантаження на тонкостінну циліндричну оболонку. Модифікації ставлять за мету пристосувати алгоритм до особливостей розглянутих моделей та оптимізувати перебір топологій за допомогою збереження кількості нейронів у вузлах мережі та відокремлення навчання нейронної мережі від генетичного ітераційного процесу. У результаті були отримані мережі для ідентифікації властивостей розглянутих моделей. Наведені результуючі архітектури згаданих нейронних мереж.

**Ключові слова:** нейронна мережа, генетичний алгоритм, видоутворення, NEAT, обернена задача, ідентифікація властивостей, еліптичний оператор, тонкостінна оболонка.

**O.S. Mahas***Oles Honchar Dnipro National University***NEURAL NETWORK CONSTRUCTION FOR APPROXIMATING THE  
SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM WITH NONLINEAR  
ELLIPTIC OPERATOR**

The problem of identifying the characteristics of a deformed system described by a nonlinear elliptic operator is considered. For this case, the variational problem statement is used in combination with numerical optimization methods. To solve this problem, a neural network approach with genetic algorithm tuning is used. The possible ways of encoding networks in such genetic algorithms can be divided into direct and indirect encoding methods. The direct encoding methods require a fixed neural network topology and weight coefficient space exploration using the recombination of the weight vectors. However, the neural network behavior is not only determined by its weights but also by its topology. So, the main goal of the current work is to find not only an approximate solution but also a simple neural network topology with a minimal component number. In this regard, the algorithm of the permutating through various network topologies (NEAT) is considered, and its adaptation to the described problem is proposed. Finding the minimal possible network topology is an important problem due to the ease of use such networks in real systems and

simpler further analysis of the processes occurring in the network nodes. The additional modifications of the genetic algorithm for constructing a neural network are proposed. Those modifications aim to adapt the algorithm to the features of the considered model and to optimize the topology search. The first approach is to encode the genome with the additional list representing the neuron count in respective network nodes. The second approach is to separate network learning process from the genetic iterative process. This modified algorithm is applied to identify typical loading patterns on a thin-walled cylindrical shell. The results of iterative process of the genetic algorithm are obtained, and the neural networks are constructed to identify the characteristics of the considered models. The current paper presents the resulting topologies of the mentioned neural networks.

**Keywords:** neural network, genetic algorithm, speciation, NEAT, inverse problem, characteristics identification, elliptic operator, thin shell.

**А.С. Магас**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **КОНСТРУИРОВАНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ**

Рассмотрена задача идентификации свойств деформированной системы, описываемой нелинейным эллиптическим оператором. Для этого случая используется вариационная постановка задачи в сочетании с численными методами оптимизации. Основным направлением работы является не только поиск приближенного решения с использованием нейросетевого подхода, но и получение простых архитектур нейронных сетей с минимальным количеством компонентов. Для достижения этой цели предложены модификации к генетическому алгоритму конструирования нейронных сетей NEAT. Модифицированный алгоритм был применен для идентификации нескольких типовых моделей нагрузки на тонкостенную цилиндрическую оболочку. Целью модификаций стоит приспособить алгоритм к особенностям рассматриваемых моделей и оптимизировать перебор топологий с помощью хранения количества нейронов в узлах сети и отделения обучения нейронной сети от генетического итерационного процесса. В результате были получены сети для идентификации свойств рассматриваемых моделей. Приведены результирующие архитектуры упомянутых нейронных сетей.

**Ключевые слова:** нейронная сеть, генетический алгоритм, видообразование, NEAT, обратная задача, идентификация свойств, эллиптический оператор, тонкостенная оболочка.

**Вступ.** Розглядається задача ідентифікації властивостей деформованої системи, що описується нелінійним еліптичним оператором. У цьому випадку використовується варіаційна постановка задачі у поєднанні із чисельними методами оптимізації [1]. Для розв'язання цієї задачі пропонується використовувати нейромережвий підхід [2-3] у комбінації із генетичним алгоритмом. Безліч можливих способів кодування мережі можна поділити на методи прямого та опосередкованого кодування. Методи прямого кодування передбачають наявність фіксованої топології мережі в поєднанні з дослідженням простору вагових коефіцієнтів за допомогою схрещування вагових векторів мережі. Але поведінка мережі визначається не лише ваговими коефіцієнтами, а ще її архітектурою.



У зв'язку з цим пропонується використовувати алгоритм перебору різних мережових топологій [4] та адаптувати його під потрібну задачу. Більш того, отримання мінімально можливої архітектури нейронних мереж є важливою задачею через зручність їх використання в реальних системах та подальшого аналізу процесів, що відбуваються у вузлах таких мереж.

**Постановка прямої задачі.** Таким чином, розглянемо спочатку пряму задачу знаходження розв'язків нелінійного еліптичного рівняння типу фон Кармана [1]. Нехай в деякій заданій обмеженій області  $\Omega = \{X | X = (x_1, x_2) \in R^2\}$  із границею  $\Gamma$  вектор-функція  $u(X, H)$  описується рівняннями:

$$Q_1 \equiv \nabla_{ij} (A_1^{ijkl}(H_1) \nabla_{kl} u_1) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} u_2 (B_{ij}(H_1) + \nabla_{ij} u_1) = \lambda H_2, \quad (1)$$

$$Q_2 \equiv \nabla_{ij} (A_2^{ijkl}(H_1) \nabla_{kl} u_2) - 1^{ik} 1^{jl} \nabla_{kl} u_1 (B_{ij}(H_1) + \nabla_{ij} u_1) = 0, \quad (2)$$

де  $Q = \{Q_1, Q_2\}$  – вектор-функції лівих частин рівняння прямої задачі,  $X \in \Omega$  – вектор просторових координат;  $H = \{H_1, H_2\}$  – вектор-функції власностей системи, причому  $H_1 = H_1(X)$  – вектор-функція коефіцієнтів рівняння,  $H_2 = H_2(X)$  – вектор-функція правої частини рівняння;  $u = (u_1, u_2)$  – вектор-функція розв'язків прямої задачі;  $A_2^{ijkl}(H_1) > 0$ ,  $A_2^{ijkl}(H_2) > 0$ ,  $B_{ij}(H_1)$  – відомі функціонали відомої вектор-функції коефіцієнтів  $H_1(X)$ ;  $\Gamma$  – кусково-гладка межа області  $\Omega$ ;  $\Gamma_i$  – кусково-гладкі контури класу  $C^1_\Gamma$ , причому  $\sum_i \Gamma_i = \Gamma$ ;  $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\nabla_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$  для  $i, j = 1, 2$ ,  $\lambda$  – вектор параметрів.

Розглядаються нульові граничні умови:

$$u_\Gamma = 0 ; \frac{\partial u_\Gamma}{\partial n} = u_n = 0, \text{ де } n \text{ – нормаль до поверхні } \Omega. \quad (3)$$

Встановимо множини допустимих розв'язків прямої та оберненої задач.

$$\tilde{u} : \begin{cases} \tilde{u}(X) \in V_\Omega^{1,2}; Q(\tilde{u}) = 0 \\ \tilde{u}|_\Gamma = 0, \tilde{u}_n|_\Gamma = 0 \end{cases}, \quad \tilde{H} : \begin{cases} \underline{H} \leq H \leq \overline{H}; H \in W_{2,\Omega}^1 \\ a \leq \frac{\partial H}{\partial u} \leq b; \frac{\partial^2 H(X)}{\partial u^2} \geq 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Тут  $\tilde{u}$  – множина розв'язків задачі (1)-(3),  $\tilde{H}$  – множина невідомих функцій оберненої задачі,  $\underline{H}, \overline{H}, a, b$  – задані границі.

**Постановка оберненої задачі.** До прямої задачі (1-3) сформулюємо обернену задачу відповідно до [1]. Нехай вектор-функція  $u(X, H)$  задана в обмеженій просторовій області  $\Omega = \{X | X = (x_1, x_2) \in R^2\}$  наступним рівнянням із використанням диференційних операторів:

$$G(H_1(X), u(X)) = H_2(X), \quad (5)$$

$$G^\Gamma(u(X))|_{X=X^\Gamma \in \Gamma} = 0, \quad (6)$$

де  $X \in \Omega$  – вектор просторових координат;  $\Gamma$  – кусково-гладка межа області  $\Omega$ ;  $\Gamma_i$  – кусково-гладкі контури класу  $C_\Gamma^1$ , причому  $\sum_i \Gamma_i = \Gamma$ ;  $H = \{H_1, H_2\}$  – невідомі функції оберненої задачі, причому  $H_1(X)$  – функція властивостей моделі, що задані диференціальним оператором  $G$ , а  $H_2(X)$  – функція, яка описує праву частину рівняння;  $G(\cdot)$ ,  $G^\Gamma(\cdot)$  – задані диференціальні оператори;  $u = (u_1, u_2)$  – функція розв’язків прямої задачі.

Розв’язок оберненої задачі, отриманий шляхом вимірювання функцій  $u(X)$  в точках  $\gamma_r$  із використанням відомих результатів спостереження за поведінкою розглянутої системи, передбачає знаходження функцій коефіцієнтів  $H_1(X)$  та правої частини  $H_2(X)$ . При цьому виміряні результати спостережень можна записати наступним чином:

$$u(\gamma_r, H) = u_r^*, \quad r = \overline{1, N}, \quad (7)$$

Область вимірювань  $\tilde{H}$  невідомих функцій  $H$  оберненої задачі визначається їх фізичним змістом. Відтак, обернена задача зводиться до задачі мінімізації цільового функціонала:

$$J(H) = \rho_W(u(X, H), u^*) \rightarrow \min, \quad (8)$$

де  $\rho_W$  – функціонал-нев’язка, що визначається метрикою в деякому функціональному просторі  $W$  відповідно до (4).

У даній роботі пропонується розглянути ідентифікацію властивостей моделі, які задані функцією  $H_2(X)$ , та використати для цього нейромережвий підхід у поєднанні із генетичним алгоритмом. Доведення можливості застосування такого підходу та проблеми, пов’язані із некоректністю постановки задачі, а саме із порушенням умови існування розв’язку, порушенням умови неперервності розв’язку за даними та можливим існуванням декількох розв’язків, розглянуті окремо в роботі [2]. При цьому, для використання нейронної мережі пропонується перейти від функціонала (8) до:

$$J^*(H) = \rho_W(H(X), H^*) \rightarrow \min, \quad (9)$$

де  $H_r^*$  – властивості моделі, що відповідають спостереженням  $u_r^*$ .

**Метод розв’язання.** Для оберненої задачі (5-6) моделюються спостереження  $(u_n^*, H_n^*)$  для  $n = \overline{1, K}$ , які є розв’язками прямих задачах на множині допустимих значень. Кількість елементів  $K$  визначається розміром множини допустимих розв’язків оберненої задачі.

У рамках даної роботи для конструювання та структурної оптимізації нейронної мережі був застосований генетичний підхід на основі алгоритму NEAT [4], а також запропоновані модифікації до нього, причому вхідними сигналами нейронної мережі виступають значення  $\{u_n^*\}$ , а вихідними сигналами – відомі з прямої задачі властивості моделі  $\{H_n^*\}$ . Основні принципи функціонування нейронної мережі описані в [3].

Такий підхід є евристичним алгоритмом пошуку шляхом випадкового підбору, комбінування та перебору шуканих параметрів із використанням принципів, які імітують біологічну еволюцію. Алгоритм передбачає паралельну обробку множини альтернативних розв'язків, зосереджуючи пошук на найбільш перспективних серед них. Спочатку розглянемо наступні етапи узагальненого генетичного алгоритму:

1) Підготовчий етап. На цьому етапі необхідно створити початкову популяцію, тобто сформувати початковий набір розв'язків.

2) Етап відбору. На цьому етапі визначається напрямок розвитку популяції, в основному, шляхом відкидання розв'язків із найменшими значеннями функції пристосованості, що сприяє покращенню її середнього значення за всією популяцією.

3) Етап схрещування. На цьому етапі за допомогою оператора схрещування відбувається утворення нових розв'язків для відновлення чисельності популяції. Особливістю оператора схрещування є його застосування до декількох геномів представників-батьків з метою утворення шляхом рекомбінації інформації із батьківських генів нових представників-нащадків, які залишаються у популяції.

4) Етап мутацій. Оскільки основною ідеєю оператора схрещування є комбінація відомої інформації про можливий розв'язок, то його використання не обов'язково призводить до розширення простору пошуку, що в свою чергу може привести до втрати можливо кращого розв'язку. На цьому етапі для розширення простору пошуку розв'язку до геномів представників, які залишились у популяції, застосовується оператор мутації. Завдяки використанню випадкового процесу він вносить до популяції нову інформацію, тим самим збільшує різноманітність її представників.

5) Етап оцінки розв'язку. На цьому етапі проводиться порівняння значень функцій пристосованості усіх представників популяції, та із використанням заданого критерію зупинки алгоритму приймається одне із двох рішень: повторити етапи 2-5; позначити найбільш пристосованого представника популяції як остаточний розв'язок. У разі продовження алгоритму поточна популяція вважається створеною для етапу 2. Критеріями зупинку можуть бути як кількість створених популяцій, так і значення функції пристосованості.

Усі сенсори та нейрони послідовно нумеруються. Додатково вводиться поняття інновації – пари індексів, що відповідають з'єднаним нейронам (та сенсорів), причому кожна унікальна інновація має свій індекс. Геном кодується списком інновацій, ваговими коефіцієнтами відповідних до інновацій з'єднань нейронної мережі, а також бітами активності цих з'єднань. Таким чином можна закодувати нейронну мережу прямого поширення довільної топології. Варто також зауважити, що утворювати геноми із циклічними з'єднаннями забороняється, адже це призведе до утворення рекурентних нейронних мереж, які в даній роботі не розглядаються.

Функція пристосованості  $F_i$   $i$ -ого представника обчислюється наступним чином:

$$F_i = 1 - E(i), \quad (10)$$

де  $E(i)$  – середньоквадратичне відхилення результатів ідентифікації нейронної мережі  $i$ -ого представника від еталонних спостережень.

Наведений алгоритм на етапі схрещування передбачає використання спеціального оператора, робота якого полягає у наступному. Утворений оператором геном включає всі спільні батьківські гени з однаковими індексами інновацій, при цьому значення біта активності вибирається випадково в одного із батьків. Гени, які не присутні одночасно в обох батьківських геномах, додаються в новий геном із заданою імовірністю. Відповідні значення вагових коефіцієнтів із однаковими інноваціями або випадковим чином вибираються із батьківських генів, або обчислюються як їх середнє значення.

Для етапу мутацій розглядаються наступні оператори.

1) Оператор структурної мутації для додавання нового з'єднання. Із використанням випадкового процесу обираються два вузли нейронної мережі (сенсор-нейрон або нейрон-нейрон) та з'єднуються між собою. Тобто до геному додається активний ген із номером інновації, який відповідає з'єднанню між цими вузлами мережі (рис. 1).

2) Оператор структурної мутації для додавання нового нейрона. Із використанням випадкового процесу обирається існуюче з'єднання вузлів мережі, на місці якого створюється новий нейрон, що з'єднується із відповідними вузлами. Тобто у геномі випадково вибраний активний ген стає неактивним, натомість до геному додаються два активні гени із номерами інновацій, яким відповідають з'єднання між попередньо пов'язаними вузлами та новим нейроном (рис. 2).

3) Мутація збурення вагових коефіцієнтів. Вагові коефіцієнти кожного гену збурюються на випадкову величину  $\Delta w_g$  із наперед заданого розподілу імовірностей  $D_M$ , де  $g$  – індекс гену.

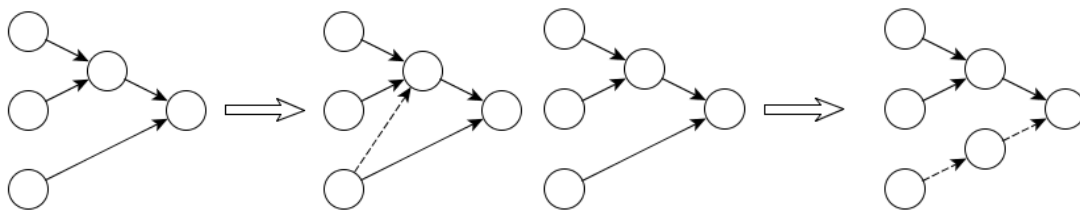


Рис. 1. Додавання зв'язку

Рис. 2. Додавання нейрону

Із міркувань бажаної мінімальності структури проміжних та результуючої нейронних мереж, для підготовчого етапу початкова популяція геномів кодує нейронні мережі без прихованих нейронів. Такий підхід дозволяє уникнути необхідності використовувати додаткові штрафні компоненти до функції пристосованості, а також зменшує простір пошуку розв'язку та використання обчислювальних ресурсів.

Для етапу відбору застосовується механізм видоутворення, основна ідея якого полягає у додаванні конкуренції між топологічно подібними геномами. Цей механізм має забезпечити багатовекторність пошуку та захист перспек-

тивних геномів від знищення. У роботі використовується відоме поняття відстані між геномами [4]:

$$\delta = c_1 \frac{N_E}{N_G} + c_2 \frac{N_D}{N_G} + c_3 \overline{\Delta W}, \quad (11)$$

де  $c_1, c_2, c_3$  – коефіцієнти видоутворення;  $N_E$  – кількість спільних генів із відмінними бітами активності;  $N_D$  – кількість відмінних генів;  $N_G$  – розмір більшого геному,  $\overline{\Delta W}$  – середнє значення абсолютних різниць вагових коефіцієнтів відповідних спільних інновацій незалежно від біту активності.

Уведене поняття відстані необхідне для обчислення модифікованої функції пристосованості, значення якої буде використане для відбору замість оригінальної. Модифікована функція пристосованості  $i$ -ого геному обчислюється за формулою [4]:

$$F_i^* = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^n sh(\delta(i, j))}, \text{ де } sh(\delta) = \begin{cases} 0 & \delta > \delta_t \\ 1 & \delta \leq \delta_t \end{cases}, \quad (12)$$

а  $\delta_t$  – порогове значення приналежності геному до одного виду.

Оскільки класичне використання механізму видоутворення потребує ретельного евристичного підбору коефіцієнту  $\delta_t$ , пропонується використовувати модифікований алгоритм видоутворення, що полягає у виборі кількості видів, яка обґрунтована розміром популяції та доступними обчислювальними ресурсами. А також у відмові використання модифікованої функції пристосованості (12) на користь наступного алгоритму. Популяція представників рівномірно поділяється на задану кількість видів, причому на етапі відбору виконуються наступні кроки:

- 1) Інформація щодо видів популяції із попереднього етапу знищується.
- 2) Найкращий геном серед тих, які ще не належать жодному виду, вважається основним представником нового виду.
- 3) Список представників цього виду заповнюється до своєї максимальної ємності такими, що мають геноми із найменшими значеннями відстані (11) до найкращого геному виду із кроку 2.
- 4) Якщо залишились представники, які ще не належать жодному із видів, перейти до кроку 2.
- 5) Модифікувати етап відбору таким чином, щоб відбір найкращих представників за оригінальною функцією пристосованості відбувався не у популяції в цілому, а окремо всередині кожного виду.

Для зменшення простору пошуку розв'язку пропонується модифікація, яка використовує відому інформацію про характер вхідних даних, а саме симетричність модельованої оболонки. Її сутність полягає в тому, що на кроці кодування геному усі сенсори записуються не окремо, а як єдина зв'язка. Така модифікація зменшує імовірність утворення випадкової залежності асиметричної до певної ділянку входу та поліпшує кінцевий розв'язок.

Тестування роботи алгоритму показало, що дуже часто топологія нейронних мереж розвивається швидше за налаштування вагових коефіцієнтів, а

довготривалий підбір параметрів генетичного алгоритму не завжди призводить до вирішення цієї проблеми. Це призводить до громіздких, але недостатньо оптимізованих у своїх нейронних з'єднань мереж. Відтак, застосування додаткових методів навчання до побудованих нейронних мереж показує суттєве зменшення середньоквадратичної похибки. Тому для вирішення цієї проблеми пропонується застосувати одну із наступних модифікацій.

1) Розділити загальну вибірку на вибірку навчання та тестування (80% та 20%). Застосувати алгоритм навчання нейронної мережі за вибіркою навчання до моменту, поки середньоквадратична похибка на вибірці тестування не почне зростати, або поки кількість епох навчання не досягне певного заданого значення. Використати значення середньоквадратичної похибки на вибірці тестування для обчислення функції пристосованості (10)

2) Відмовитись від зберігання вагових коефіцієнтів у геномі та встановити  $c_3 = 0$  у формулі відстані між геномами (11). Навчання нейронної мережі та обчислення функції пристосованості відбувається аналогічно модифікації 1, за винятком того, що одночасно розглядається множина нейронних мереж однакової топології потужністю  $n_r$ , але із різними початковими значеннями вагових коефіцієнтів. Нейронна мережа із найменшим значенням середньоквадратичної похибки потрапляє до банку нейронних мереж та надалі повторно використовується для ідентичних геномів з метою уникнення зайвих обчислень. Вибір початкових вагових коефіцієнтів ґрунтується на методі Ксав'є [5] із використанням випадкового процесу за формулою:

$$W_{i,j} \sim N\left(\mu = 0, \sigma^2 = \frac{2}{in(j) + out(j)}\right), \quad (13)$$

де  $W_{i,j}$  – ваговий коефіцієнт з'єднання від вузла з індексом  $i$  до вузла з індексом  $j$ ,  $in(j)$  – кількість вхідних з'єднань вузла з індексом  $j$ ,  $out(j)$  – кількість вихідних з'єднань вузла з індексом  $j$ .

Під час спостережень за ітераціями генетичного алгоритму було виявлено, що продуктивні геноми представників часто утворюють структури, які мають частини, що є типовими для класичних багатошарових нейронних мереж. Але для їх конструювання необхідне вдаль застосування операторів схрещування та мутацій. У зв'язку з цим, у кодуванні геномів та інноваціях пропонується розглядати не окремі вузли, а їх зв'язки. Відтак, пропонується модифікація, згідно якої до геному додається список пар  $(i, n_i)$ , який встановлює кількість нейронів  $n_i$  у зв'язці вузла з індексом  $i$ . Кількість нейронів у зв'язці не може бути меншою за 1, а зв'язка вихідного вузла завжди має мінімальний розмір.

Застосування цієї модифікації вимагає додавання до оператора схрещування додаткового кроку для об'єднання вузлових списків: відповідні значення розміру зв'язки із однаковими вузловим індексам випадковим чином або вибираються із батьківських генів, або обчислюються як їх середнє значення з округленням до цілого.

Крім того, необхідно додати новий оператор мутації для збурення розмірів зв'язок, алгоритм якого полягає у наступному. Із використанням випадкового процесу вибирається індекс вузла, та із заданою імовірністю розмір зв'язки цього вузла або збільшується на 1, або зменшується на 1, або ділиться навпіл з округленням до цілого.

В якості функції активації нейронів використаний гіперболічний тангенс, а для навчання нейронної мережі для розглянутих модифікацій застосовано алгоритм RPROP [6], оскільки він потребує меншої кількості ітерацій навчання та не вимагає налаштування фіксованого коефіцієнту навчання.

**Результати.** Розв'язання задачі (9) здійснювалось поетапно із послідовним введенням описаних алгоритмів. Надалі демонструються найкращі розв'язки із усіма розглянутими модифікаціями основного алгоритму, який був застосований для ідентифікації функції правої частини  $H_2(X)$  рівняння (5) з наступними характеристиками. Область  $\Omega$  – замкнута тонкостінна циліндрична оболонка з параметрами  $L/R = 4$ ,  $R/h = 100$ ,  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu = 0,3$ , де  $L, R, h$  – довжина, радіус, товщина оболонки;  $E, \mu$  – модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона. Причому,  $0 \leq x_1 \leq L/R$ ,  $-\pi \leq x_2 \leq \pi$ .

Функція правої частини  $H_2(X)$ , яка характеризує закон зміни навантаження, описується моделями  $A, B, C$ , та задається відповідними формулами:

$$H_A(X) = \begin{cases} \lambda_0 & x_2 \in [-q\pi; q\pi], \\ 0 & x_2 \notin [-q\pi; q\pi], \end{cases} \quad (14)$$

$$H_B(X) = \lambda_0(1 + \cos x_2)^q, \quad (15)$$

$$H_C(X) = \lambda_0(1 + \cos qx_2), \quad (16)$$

де  $\lambda_0, q$  – параметри навантаження. Типові елементи вибірки з цих моделей показано відповідно на рис. 3-5.

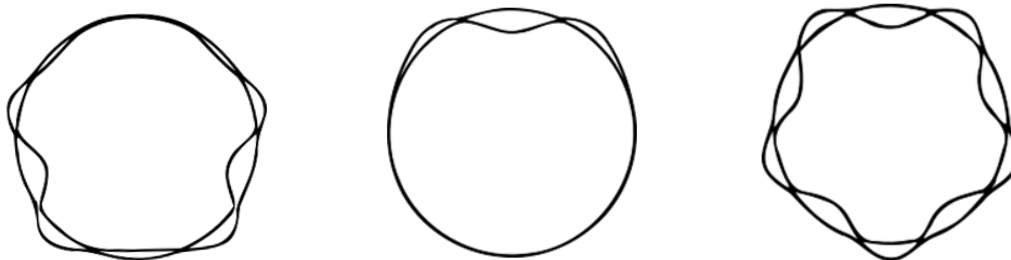


Рис. 3. Елемент із моделі  $A$ . Рис. 4. Елемент із моделі  $B$ . Рис. 5. Елемент із моделі  $C$ .

Інформація про розв'язки прямих задач  $(u_n^*, H_n^*)$ ,  $n = \overline{1, K}$  отримана на основі нелінійного скінченного елемента, який реалізований у пакеті інженерних розрахунків «COSMOS/M».

За результатами роботи на рис. 6-9 показні архітектури нейронних мереж відповідно до моделей правої частини  $A, B, C$ , а також комбінованої моделі, вибірка якої включає усі зазначені моделі одночасно.

Архітектура результуючої нейронної мережі для моделі *A* (рис. 6) передбачає поєднання одного прихованого вузла з двома незалежними підмережами другого порядку (вузли 2-4 та 5-7).

Для моделі *B* архітектура її результуючої нейронної мережі (рис. 7) передбачає поєднання одного прихованого вузла із двома незалежними підмережами другого (вузли 6, 8) та третього (вузли 2-5, 7) порядків.

У моделі *C* відповідна архітектура (рис. 8) передбачає поєднання одного прихованого вузла із двома підмережами третього порядку (вузли 2-4 та 5-8) зі спільним вузлом 2.

У свою чергу, нейронна мережа комбінованої моделі (рис. 9) передбачає поєднання мережі з одним прихованим прошарком (вузли 1-4) із двома незалежними підмережами другого (вузли 5-6) та третього (вузли 7-10) порядків.

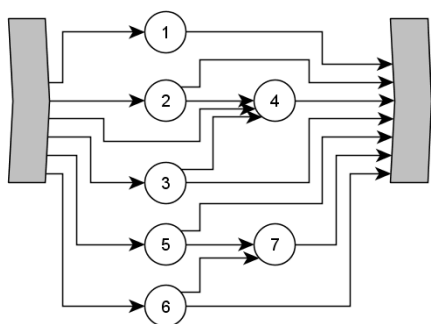


Рис. 6. Нейронна мережа моделі *A*.

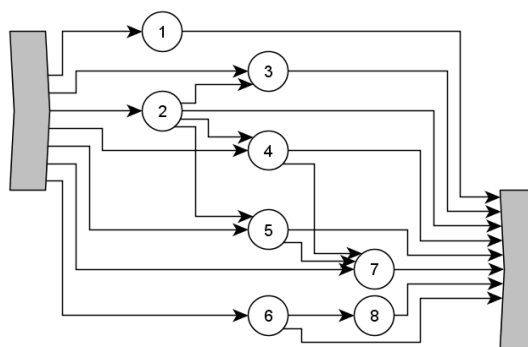


Рис. 7. Нейронна мережа моделі *B*.

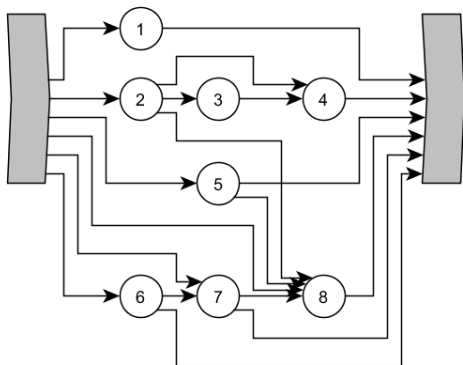
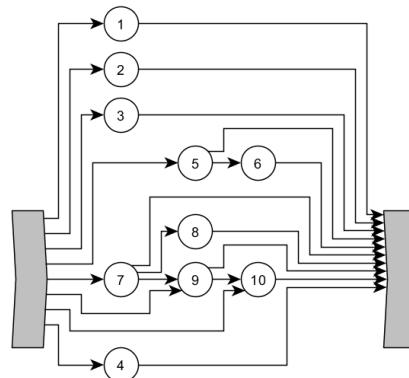


Рис. 8. Нейронна мережа моделі *C*. Рис. 9. Нейронна мережа комбінованої моделі.



**Висновки.** Середньоквадратична похибка на вибірці для перевірки узагальнюючої здатності нейронних мереж склала менше 1%. Сконструйовані нейронні мережі для розглянутої задачі є простими, що робить доцільним їх подальше використання та аналіз.

#### Бібліографічні посилання

1. Ободан Н.І., Гук Н.А. Ідентифікація навантажень за допомогою динамічної нейронної мережі. *Машинознавство*. 2013. №4. С. 38-45.
2. Ободан Н.И., Гук Н.А., Магас А.С. Корректность нейросетевой аппроксимации решения обратной задачи для нелинейного эллиптического оператора. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Д., 2015. С. 147-156.



3. **Haykin S.S.** Neural networks and learning machines. Third. *Pearson Education*. 2009. P. 934.
4. **Stanley K.O, Miikkulainen R.** Evolving Neural Networks Through Augmenting Topologies. *Evolutionary Computation*. 2002. V. 10. №2. P. 99-127.
5. **Glorot X., Bengio Y.** Understanding the Difficulty of Training Deep Feedforward Neural Networks. *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics. Proceedings of Machine Learning Research*. 2010. №9. P. 249-256.
6. **Riedmiller M.A., Braun H.** A direct adaptive method for faster backpropagation learning: the RPROP algorithm. *IEEE International Conference on Neural Networks*. 1993. V.1. P. 586-591.

Надійшла до редколегії 26.09.2022.

**O.O. Maliienko, V.A. Turchyna**  
*Oles Honchar Dnipro National University*

## **THE STUDY OF THE INFLUENCE OF COMBINED CHANGES IN THE INITIAL DATA ON THE OCCURRENCE OF ANOMALIES FOR RESOURCE ALLOCATION**

This paper considers one of the optimization problems on graphs, namely, the problem of constructing parallel ordering of vertices. Three cases of anomalous deterioration of the value of the objective function with the simultaneous improvement of the two initial parameters are investigated. The obtained results are the basis for further study of subclasses of graphs for which such anomalies will always arise.

**Keywords:** anomalies, optimal parallel ordering, minimum ordering length, oriented graph.

**О.О. Малієнко, В.А. Турчина**  
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КОМБІНОВАНИХ ЗМІН ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ НА ВИНИКНЕННЯ АНОМАЛІЙ ПРИ РОЗПОДІЛІ РЕСУРСІВ**

Питання розподілу ресурсів стало актуальне з появою потужних обчислювальних систем, локальних корпоративних і зовнішніх комунікаційних мереж, технологій пошуку та багатовимірного аналізу даних, розвитком веб-технологій та інформаційних потоків. Застосування методів розподіленої обробки даних стало особливо актуальним для високотехнологічних географічно розподілених компаній, діяльність яких підтримується і супроводжується сучасними інформаційними технологіями і системами. Зокрема, коли на послідовність обробки накладається відношення часткового порядку. У цьому випадку виникають деякі непередбачувані ситуації, які названі у роботі аномаліями.

При моделюванні зв'язків між частково упорядкованими даними ефективно використовувати апарат теорії графів. У таких формулюваннях частковий граф може служити моделлю часткового порядку. Тоді, відповідні задачі оптимізації на таких орієнтованих графах є математичними моделями, аналіз яких дозволяє знайти оптимальні розв'язки.

У даній роботі розглядається одна із оптимізаційних задач на графах, до якої можуть бути зведені деякі практичні проблеми, а саме: задача побудови паралельного упорядкування вершин. Задана скінчена множина робіт, бажана послідовність їх виконання та скінчена множина виконавців. На порядок виконання робіт задані технологічні обмеження та відомий час виконання кожної роботи. Для цієї задачі досліджуються три випадки появи аномального погіршення значення цільової функції при одночасному покращенні двох вихідних параметрів (зменшення часу виконання робіт, послаблення обмежень на порядок робіт, збільшення кількості виконавців або зміна списку пріоритетів). Отримані результати є основою для подальшого дослідження підкласів графів, для яких такі аномалії будуть завжди виникати та випадки, коли вони не матимуть впливу на оптимальність розв'язку.

**Ключові слова:** аномалії, оптимальне паралельне упорядкування, мінімальна довжина упорядкування, орієнтований граф.

**О.О. Малиенко, В.А. Турчина**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМБИНИРОВАННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ АНОМАЛИЙ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ**

В данной работе рассматривается одна из оптимизационных задач на графах, а именно: задача построения параллельного упорядочивания вершин. Для неё исследуются три случая появления аномального ухудшения целевой функции при одновременном улучшении двух исходных параметров. Полученные результаты являются основой дальнейшего исследования подклассов графов, для которых такие аномалии будут всегда возникать.

**Ключевые слова:** аномалии, оптимальное параллельное упорядочивание, минимальная длина упорядочивания, ориентированный граф.

**Introduction.** The question of determining the optimal order of execution of a certain number of partially ordered tasks in the presence of certain restrictions is of both theoretical and practical interest. Restrictions can relate to the availability of certain resources (performers, processors, etc.) and the time to complete tasks. Such problems arise in many application areas, which include: research of communication networks, management systems, design of complex communication systems, research of transport and information flows and such human spheres of life as determination of the sequence of work performed by employees, issues of assembly line management, etc.

A partial graph can serve as a partial order model. Then the corresponding optimization problems on such oriented graphs are mathematical models, the analysis of which allows to find optimal solutions.

In the classical formulation, this task corresponds to the definition of the order of work that requires the same amount of time, a certain number of performers (and it is believed that each performer can perform any work). But in practice, this situation is quite rare. It is much more common to determine the optimal order of the same type of work, which requires different amounts of time to be performed, or have the same number of performers at each time, or when the work is not of the same type and can be divided into several groups. In addition, along with the partial order ratio, additional desirable preferences for the order of execution may be set, which do not violate this relationship. Such practical tasks correspond to the generalization of classical formulations of problems.

One of the problems in solving classical and generalized problems is the presence of situations that can be considered as anomalies. That is, such cases when the change of input parameters of the problem, which for logical reasons should reduce the optimal value of the objective function, or at least not worsen it, leads to its increase. For example, increasing the total execution time by reducing

the execution time of individual tasks, or the presence in the digression of transitive, uninformative arcs, which affect the optimality of the solution obtained by some algorithm.

**Problem Statement.** We can formulate some of these problems in the language of graph theory. Suppose you have a set  $V$  consisting of a finite number of elements  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ .

Definition 1. The linear order  $S$  of the elements of the set  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  is the arrangement of these elements in  $n$  places that are arranged in the linear order, in which each element is only in one place (some places may be empty) [3].

Denote by  $S[i]$  the set of vertices that are in order  $S$  in the  $i^{\text{th}}$  place.

Definition 2. The width of the ordering  $S$  is called the value  $h(S) = \max_{i=1..n} |S[i]|$ .

Since, by definition, some places in the order may be empty, let's suppose they are located to the right of non-empty spaces.

Definition 3. The length of the ordering  $S$  is a value  $l(S)$  equal to the number of non-empty spaces in the ordering.

The oriented graph  $G = \{V, U\}$  is given. The following definitions can be formulated.

Definition 4. The parallel ordering of vertices of an oriented graph  $G = \{V, U\}$  is a linear ordering  $S$  of elements of a set of the vertices  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , in which it follows from the fact that from the vertex  $v_i$  there is an arc to the vertex  $v_j$ , is the fact that the vertex  $v_i$  is in the order to the left of the vertex  $v_j$ . As follows, if  $(v_i, v_j) \in U$  and  $v_i \in S[p]$  and  $v_j \in S[q]$ , then  $p < q$  [3].

Obviously, in order for a parallel order to exist, it is necessary that the oriented graph is acyclic.

Among the optimization problems associated with the construction of the optimal orderings, the most studied problem is the one of construction on a given graph  $G$  and a given width  $h$ , a parallel ordering of the minimum length  $l$ . Denote it as problem 1.

In applied problems, the execution time of tasks is often different, so consider the generalization of problem 1, when a weighted graph is given. The weight of the vertex is the time  $\tau_i$  of the corresponding work with the number  $i$ . Denote this problem as problem 2.

Definition 6. We call the generalized parallel ordering, built up with fixed given parameters of the problem, the initial ordering  $S^*$ . We will say that there is an anomaly in solving a problem, if after changing the input parameters, which should intuitively improve the solution, the length of the obtained ordering is greater than the length of the initial ordering.

For problem 2, consider the following input data:

- 1) an oriented graph  $G = \{V, U\}$  that specifies the connections between the vertices;
- 2)  $h$  width of the ordering under construction;
- 3)  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  scales of vertices;

4)  $L$  list of priorities.

The result obtained in the problem under consideration is the value of the objective function, namely the length of the constructed parallel ordering.

In analyzing this problem, Ronald Graham [1] considered the anomalies that can be detected by the following changes in the parameters:

1) Reducing the weights of all vertices  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  or the weight of a number of vertices (arbitrarily or by a certain constant);

2) removing the arc from the oriented graph  $G = \{V, U\}$ . In practice, this corresponds to the case when the dependence between works weakens. That is, restrictions on the order of performance of a certain number of works are removed;

3) increasing the width  $h$  of the order under construction. In practice, this corresponds to the case when an additional resource is used to perform the work (worker, machine, etc.);

4) changing the list of priorities  $L$ . Note that the list of priorities is the most ambiguous parameter of the problem, because there are no restrictions on its task, while the optimality of solving the problem to some extent depends on how successful this choice will be.

In [2], the emergence of anomalies in improving the above parameters was illustrated by example. And also, the generalization of several cases is considered, namely rising of anomalies at simultaneous realization of several conditions:

1) increasing the width  $h$  and changing the list of priorities  $L$ ;  
 2) reducing the weight of some vertices from  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  and removing the arc from the original oriented graph;

3) removing the arc from the original oriented graph and increasing the width  $h$ . Consider now other cases:

1) increasing the width  $h$  and decreasing the weights of the vertices  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ ;

2) changing the list of priorities  $L$  and reducing the weights of the vertices  $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ ;

3) removing the arc from the original graph and changing the priority list  $L$ .

Example 1. A graph  $G_l$  (fig. 1) is given, a list of priorities  $L=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$ ,  $h=3$ . The weight of each vertex is  $\tau_i$ . Each vertex in the figure is denoted as " $i/\tau_i$ " ("a vertex number/a vertex weight").

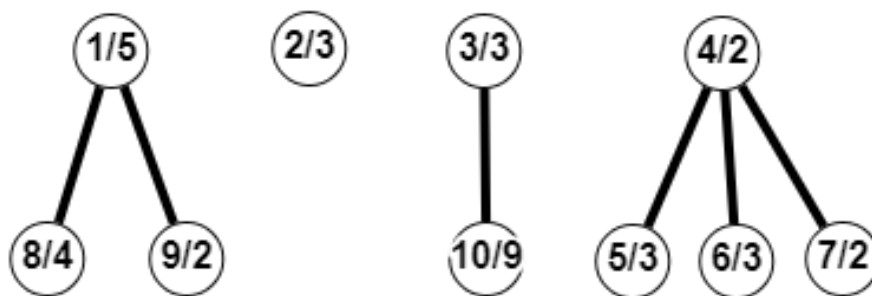


Figure 1. Graph  $G_l$

The optimal ordering is given in table 1.

Table 1

Optimal ordering for graph  $G_1$

1	1	1	1	1	5	5	5	7	7	9	9
2	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	8
3	3	3	10	10	10	10	10	10	10	10	10

The length of the optimal ordering  $l = 12$ .

1) Let  $h' = h + 1$ . We reduce the time of work. Set the weight of some vertices as follows:

$$\tau'_i = \tau_i - 1,$$

where  $\tau'_i$  is the new weight of each vertex. Denote the graph as  $G_2$  (fig. 2).

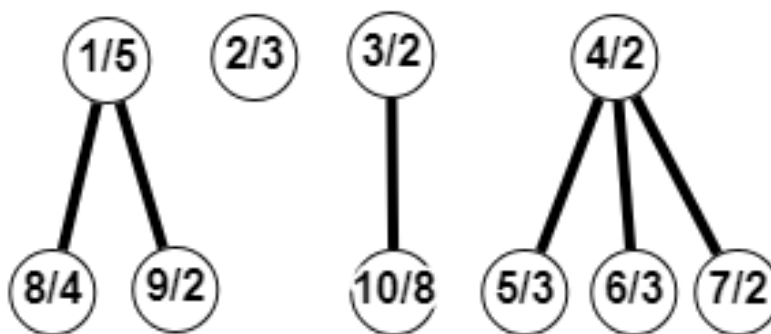


Figure 2. Graph  $G_2$

Find the optimal ordering (table 2):

Table 2

Optimal ordering for graph  $G_2$

1	1	1	1	1	8	8	8	8				
2	2	2	7	7	9	9						
3	3	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	10
4	4	6	6	6								

The length of this ordering  $l = 13$ . That is, with the reduction of the time of some works and the increase in the number of performers, the total time of all works increased.

2) Let  $L' = (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ . We reduce the time of all works. Denote the graph as  $G_3$  (fig. 3).

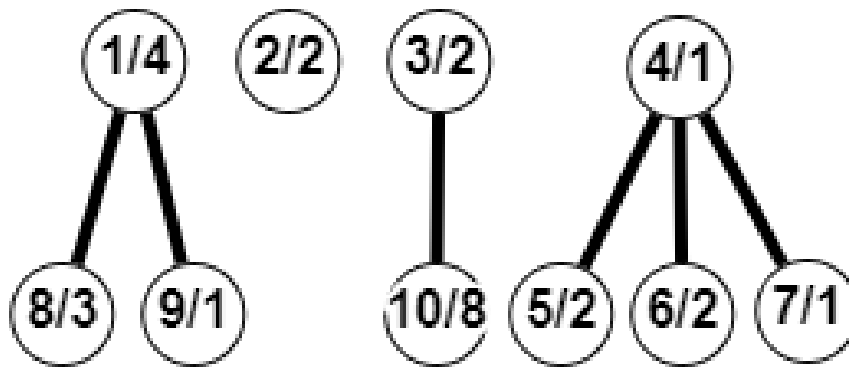


Figure 3. Graph  $G_3$

The optimal ordering is given in table 3.

Table 3

Optimal ordering for graph  $G_3$

1	1	1	1	7	9								
2	2	5	5	8	8	8							
4	3	3	6	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10

The length of the ordering increases,  $l = 13$ .

3) Let  $L' = (1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 8, 9, 10)$ . Weaken technological constraints by removing the arc (fig. 4). Denote the graph as  $G_4$ .

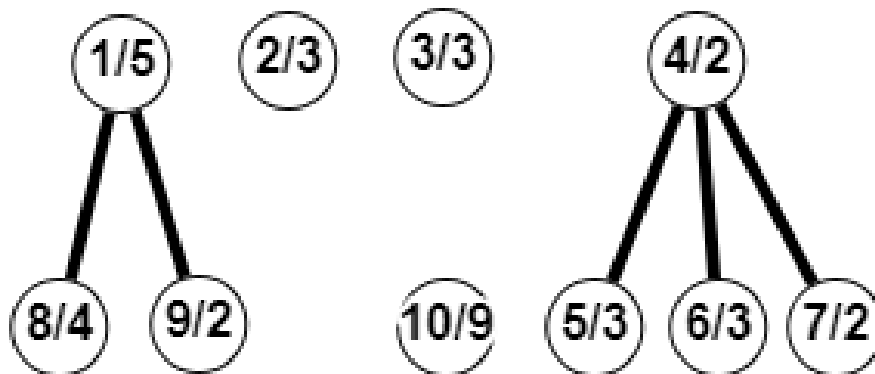


Figure 4. Graph  $G_4$

Find the optimal ordering (table 4):

Table 4

Optimal ordering for graph  $G_4$

1	1	1	1	1	6	6	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	2	2	5	5	5	8	8	8	8							
3	3	3	4	4	7	7	9	9								

The length  $l = 17$ , that is 41.7% worse than the optimal result.

Further research is needed to obtain the conditions imposed on the graphs and parameters under which anomalies will always arise. As well as obtaining a priori quantitative estimates of the deterioration of the solution.

### References

1. Graham R. L. Bounds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM J. Appl. Math.* 1969. V. 17. P. 416–429.
2. Турчина В. А., Федоренко Н. К. Исследование влияния транзитивных дуг на оптимальность некоторых алгоритмов параллельного упорядочения. *Проблемы управления и информатики*. 2012. №1. С. 62-69.
3. Челпанова О.О., Турчина В.А. Узагальнення аномальних випадків у задачах упорядкування. *Питання прикладної математики та математичного моделювання*. Д., 2021. С. 220-226.

Received 05.09.2022.



**Т.В. Наконечна<sup>1</sup>, О.В. Нікулін<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

<sup>2</sup>*Дніпровський державний технічний університет*

## **ВИКОРИСТАННЯ СЕМАНТИЧНИХ МЕРЕЖ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ФАХІВЦІВ**

Перед вищою освітою постійно постають проблеми модернізації, розв'язання яких вимагає об'єднання загальнонаукових та спеціальних знань в навчальному процесі. Розглянуто можливості семантичних мереж і технологічного підходу при викладанні математичних та профільних дисциплін з інноваційним використанням математизації та інформаційних технологій. В основі графічне моделювання з врахуванням едукологічних аспектів навчання для інтеграції зусиль викладачів і здобувачів при підготовці фахівців.

**Ключові слова:** семантичні мережі, математизація, інноватика, графічне моделювання, підготовка фахівців

**T.V. Nakonechna<sup>1</sup>, A.V. Nikulin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Oles Honchar Dnipro National University,*

<sup>2</sup>*Dniprovsky State Technical University*

## **APPLICATION OF SEMANTIC NETWORKS IN TRAINING SPECIALISTS**

Neo-industrialization is relevant for Ukraine today, according to which higher education constantly faces modernization problems, the solution of which requires combining general scientific and special knowledge in the educational process. Topics related to the presentation of mathematical, systematic and professional knowledge in a visual form with control of adequacy to practical content are relevant. Educology is devoted to systematic research and the implementation of their results in the field of education. An analysis of the successful activity of the graduating department for several decades showed that it was conducted in accordance with the concepts that conceptually correspond to the system approach in a natural combination of "hard" and "soft" options. The possibilities of semantic networks and technological approach in teaching mathematical and specialized disciplines with innovative use of mathematization and information technologies are considered. Efforts are concentrated on research and solutions to scientific and technical problems arising from the problem of longitudinal stability the rolling processes. It is based on graphic modeling, taking into account the educational aspects of learning to integrate the efforts of teachers and students in the training of specialists.

The use of innovative developments is one of the priority directions of the development of university education, which allow to raise the professional level of teaching a separate discipline and the entire system of higher education, avoid overloading of students and teachers, and contribute to the creative development of current and future specialists with significant results.

**Keywords:** semantic networks, mathematization, innovation, graphic modeling, training of specialists

**Т.В. Наконечная<sup>1</sup>, А.В. Никулин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

<sup>2</sup>Дніпровський державний технічний університет

## **ПРИМЕНЕНИЕ СЕМАНТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ**

Перед высшим образованием постоянно встают проблемы модернизации, решение которых требует объединения общенаучных и специальных знаний в учебном процессе. Рассмотрены возможности семантических сетей и технологического подхода при преподавании математических и профильных дисциплин с инновационным использованием математических и информационных технологий. В основе графическое моделирование с учетом эдукологических аспектов обучения для интеграции усилий преподавателей и соискателей при подготовке специалистов.

**Ключевые слова:** семантические сети, математика, инноватика, графическое моделирование, подготовка специалистов

**Вступ.** Перед сучасним суспільством постає ряд проблем, для розв'язання яких потрібно синергетичне використання загальнонаукових та спеціальних знань. Для України наближаючого часу актуальна неоіндустріалізація [1], яка вимагає об'єднання методів і результатів технічних, фундаментальних і гуманітарних наук, щоб знайти необхідні рішення. Системний підхід розширює можливості для моделювання та застосування математичних методів при знаходженні розв'язків нагальних задач [2]. Очевидно, що вивчаючи математику повинні розуміти математичні аспекти технічно-економічних проблем, а у прикладних науках, які вони вивчають, треба демонструвати ефективність математики. Кожна галузь науки має свої унікальні особливості, але різні їхні області можуть мати спільні риси, які можна описати за допомогою графічного моделювання. Теми математичного моделювання, обчислень для розв'язання задач технічного профілю актуальні. З одного боку, математика є інструментом оволодіння інформаційними, а, отже, і високими технологіями, та з іншого – можна розглядати математичні методи як невід'ємну частину інформаційних технологій [3]. Тому тематика, пов'язана з представленням математичних, системних і професійних знань в наочній формі з контролем адекватності практичному змісту – актуальна.

**Завдання дослідження.** Знайти резерви вдосконалення підготовки фахівців з опорою на інноваційні інформаційні технології відповідно їх едукологічних аспектів. У вивченні математичних і профільних дисциплін пропонується технологічний підхід з графічним моделюванням, що враховує та віддзеркалює повноту взаємопроникнення та взаємозалежності їх тематики для отримання бажаних результатів навчання.

**Виклад основного матеріалу.** Разом із суспільними та діловими відносинами з розвитком цивілізації склалися та еволюціонували соціальне управління та менеджмент. Наука управління, яка виникла, будувалася на основі суспільного досвіду, кращих зразків управлінської практики, наукових досягнень у галузі багатьох наук: філософії, системології, праксеології (теорії

ефективної діяльності), психології, теорії суспільного та державного устрою (соціології та політології) тощо [4].

Починаючи з середини двадцятого століття, використання науково-теоретичних, зокрема системних, основ для вдосконалення управління стало набувати масового характеру. В історії розвитку системних ідей в управлінні підприємствами та установами виділяють два етапи, які знаходяться в основі відповідних підходів у науці про управління:

1-й етап (середина 50-х – середина 70-х років минулого століття), коли відбувалося становлення та розвиток "жорсткого" системного підходу;

2-й етап (середина 1970-х років – теперішній час). Становлення та розвиток "м'якого" системного підходу.

"Жорсткий" системний підхід в управлінні (та в освіті) характеризується застосуванням, перш за все, технічних методів та нововведень у прогнозуванні та управлінні ресурсами та структурою організації або фірми. Організація (фірма) сприймається як переважно детермінована система. "Жорсткі" елементи управління - це складові елементи управління в організації, які відображають її формальну сторону. До них відносяться: стратегії; організаційні структури; системи та процедури.

"М'який" підхід до управління фокусується на людині, її світогляді, цінностях, інтересах. За такого підходу розглядаються різні погляди на проблему визначення найбільш ефективного шляху знаходження рішень.

"М'яке" системне мислення особливо наголошує на ролі цінностей, переконань і загального погляду на зовнішнє середовище. Його головною метою є вивчення та опис культури та політики соціальної системи для того, щоб процес змін підтримувався усім персоналом підприємства або організації.

"М'які" елементи управління стосуються насамперед корпоративних комунікацій. Вони отримали свою назву з тієї причини, що багато компаній воліють організовувати власне управління, не зважаючи на наявність чи відсутність цих складових. Найчастіше на них не звертають уваги, вважаючи, що ці елементи системи навіть не є елементами управління. До них відносяться: стиль управління; якісний склад персоналу; навички та цінності.

Вирішення актуальних завдань модернізації у сфері освіти здійснюється на науковій основі із залученням системного підходу [5,6]. Аналіз успішного досвіду такої модернізації показав, що саме синергетичне поєднання елементів "жорсткого" та "м'якого" управлінь забезпечує ефективність роботи. Недостатньо побудувати конструкцію організаційної системи за бездоганим проектом, тобто із застосуванням "жорсткого" системного підходу. Для досягнення поставленої мети необхідно забезпечити ефективне функціонування системи налаштуванням роботи її елементів та підсистем в умовах неминучої невизначеності ситуацій (хоча б часткової) та перешкод, з обов'язковим залученням "м'якого" системного підходу.

Застосування системології при стратегічному плануванні розвитку [7] призвело до таких висновків: «У державах третього покоління основним продуктом стають нові технології та нові ідеї. У цьому найважливішим ресурсом є

творчий потенціал еліти суспільства. Вища школа у разі успішного розвитку держави дає можливість переходити від одних ресурсів до інших, від виробництва машин до виробництва ідей. Практика показує, що це дозволяє найбільше зберігати навколишнє середовище та підвищувати якість життя».

На основі наведених висновків формулюються провідні компетенції університетської освіти:

- масова підготовка та перепідготовка висококваліфікованих фахівців, передача професійних стандартів;
- забезпечення особистісної наступності поколінь фахівців шляхом передачі моральних та етичних норм та традицій;
- забезпечення підготовки еліти, яка складається з індивідів і особистостей зі сформованими компетентностями, які з часом візьмуть на себе прийняття та реалізацію стратегічних рішень.

Навчальні програми спеціальності 136 Металургія, відповідно до вимог державного освітнього стандарту, передбачають вивчення широкого спектра математичних дисциплін, які орієнтовані на підготовку фахівців у технічному університеті [8].

При плануванні реалізації освітніх програм на факультеті враховуються всі можливості для професійного становлення майбутнього металурга, а саме:

- 1) дисциплінам математичної підготовки, що містяться в таблиці, виділяється помітна частка годин (кредитів) в освітніх програмах;
- 2) математичний апарат інформаційних дисциплін викладається у відповідних розділах математичних дисциплін. Так, наприклад, основи роботи з системами Excel і MathCAD опрацьовуються в курсі вищої та прикладної математики;
- 3) в дисциплінах математичної підготовки застосування вивчених методів розглядаються на прикладах, пов'язаних з інформаційними або профільними дисциплінами.

Так, наприклад, в курсі аналізу, моделювання та оптимізації процесів ОМТ цільовим об'єктом докладання освоєних методів аналізу і синтезу на основі комп'ютерного моделювання є технологічні системи.

Виклики часу до рівня професійної підготовки зобов'язують модернізувати математичну підготовку майбутніх металургів, в якій в даний час можна виділити наступні протиріччя:

- між проникненням математичних методів і моделей у виробництво і присутню практику навчання математики студентів без урахування специфіки спеціальності, коли поверхнево розглядаються важливі застосування математичного апарату;
- між бурхливим проникненням інформаційних і комунікаційних технологій в професійну діяльність фахівця та обмеженим використанням інформаційних технологій в навчанні математики студентів технічних спеціальностей;
- між необхідністю надати студенту можливість вибудувувати індивідуальний маршрут в навчальному процесі та помітною жорсткістю навчальної програми, форм і методів в організації навчального процесу;

– між декларованою в державному освітньому стандарті вищої професійної освіти можливістю мати університетський компонент і його недостатньо ефективною реалізацією на практиці;

– між індивідуальними особливостями студентів і масовістю не зовсім гнучкій підготовки фахівців технічних спеціальностей.

В результаті навчальний процес з математики повинен бути спроектований з урахуванням усунення зазначених протиріч, він повинен бути інтегрованим, тобто з обов'язковим включенням технічних і технологічних прикладів та більш раціональним застосуванням інформаційних технологій.

На металургійному факультеті ДДТУ для спеціальності «Обробка металів тиском» поряд з традиційними для університетів формами навчання математики (лекціями і практичними заняттями) в навчальний процес введені професійно-орієнтовані практикуми математичного моделювання, що проходять в сучасних комп'ютерних класах з використанням систем комп'ютерної математики. Відзначимо, що під системою комп'ютерної математики розуміється програмний засіб, функціональне наповнення якого дозволяє ефективно вирішувати математичні задачі будь-якої складності, з високим ступенем візуалізації всього поетапного процесу розв'язання. З методичної точки зору до систем комп'ютерної математики відносять такі групи програмних засобів: системи для чисельних розрахунків; табличні процесори; спеціалізовані математичні пакети (в тому числі статистичні та дослідницькі); програми побудови графіків функцій; професійні математичні пакети. Найбільш відомими є MathCAD, Maple, MatLab, Mathematica ін. [9].

Їх відмінними рисами є наступні:

- наявність ефективних засобів для проведення чисельних розрахунків;
- можливість символічних (аналітичних) обчислень практично по всіх розділах вищої математики;
- можливість візуалізації різних графічних об'єктів;
- наявність засобів для зручного створення науково-технічних і технологічних документів;
- можливість інтеграції з іншими програмними засобами.

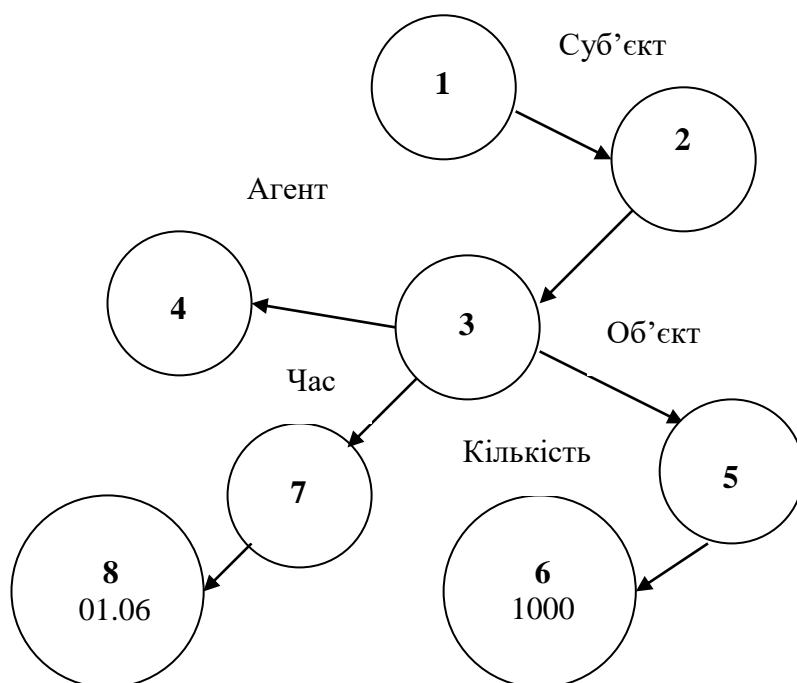
З професійних математичних пакетів для використання в навчанні математики обрана система MathCAD [10]. Головними її перевагами є наступні: поряд з численними потужними математичними засобами, вона проста і доступна у вивченні і використанні; дозволяє одночасно з розрахунками створювати документи в зручному форматі. Технологічним забезпеченням комп'ютерного практикуму з математики є навчальні посібники нового покоління, атлас технологічних карт, електронна енциклопедія, в яких містяться необхідні теоретичні відомості, докладно розібрані приклади, завдання для самостійного рішення, лабораторні роботи, довідкові матеріали по використанню MathCAD. Зміст практикуму з математичних дисциплін охоплює не тільки традиційні для технічних спеціальностей розділи вищої математики: «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Теорія ймовірностей і математична статистика», а й су-

часні розділи прикладної математики: «Метод скінчених елементів», «Дослідження операцій». Система практичних і лабораторних робіт з математичних дисциплін розроблена відповідно тем: основи роботи в системі MathCAD; побудова графіків функцій в системі MathCAD; розв'язання задач математичного аналізу в MathCAD; матричні обчислення. Важливі до подальшого професійного використання: розв'язання рівнянь в MathCAD; матричні обчислення при розв'язанні технічних задач; функції і графіки в математичному моделюванні; інтерполяція функцій; знаходження емпіричних формул залежностей за методом найменших квадратів; виробничі функції; еластичність; розв'язання задач лінійного програмування; балансові моделі. Як показує накопичений досвід, технологічний підхід дозволяє студентам поліпшити розуміння причинно-наслідкових зв'язків в техніці, наочно побачити зв'язок математики з виробництвом (що надзвичайно важливо для студентів молодших курсів), оцінити значні переваги використання інформаційних технологій у вирішенні професійних завдань. В ході виконання завдань студенти набувають цінні навички дослідницької роботи, планування, прогнозування, побудови аналітичних моделей, обробки результатів експериментів. Все це призводить до підвищення інтересу у студентів, як до математики, так і до профільних дисциплін, що в підсумку позитивно впливає на формування професійної компетентності майбутнього металурга.

Технологічний підхід дозволяє активно впроваджувати інформаційні технології в освітній процес. З'являються нові можливості їх використання в навчанні вищої та прикладної математики. Найбільш ефективним при навчанні студентів є створення технологічних підручників та електронних енциклопедій з різних розділів вищої та прикладної математики. Їх застосування дозволяють удосконалювати вищу професійну освіту, при цьому кожен, хто навчається, отримує реальну можливість побудувати свою власну індивідуальну програму навчальної діяльності відповідно до основної програми, яка побудована на основі державних освітніх стандартів. Сучасне суспільство висуває все більш високі вимоги до здобувачів вищої освіти, тому необхідно ефективно використовувати весь потенціал наявних освітніх ресурсів. Одночасно потрібно вирішувати проблему перевантаження навчальних програм. Кількість аудиторних годин, що відводяться на вивчення конкретної дисципліни, не збільшується, час на самостійне вивчення під керівництвом викладача скорочується. Виникає необхідність перенести суттєву частину навантаження на самостійну роботу, в чому неоціненну допомогу надають інформаційні технології. У свою чергу, до аудиторних занять пред'являються додаткові вимоги: ефективність проведення аудиторних занять та управління організацією самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів. Потрібно так проектувати навчальний процес, щоб здобувачі вищої освіти за той же час навчання і формування компетентностей встигали засвоїти стрімко зростаючий обсяг знань і умінь, тобто потрібна реальна раціоналізація навчального процесу.

Активна інформатизація процесу навчання відбувається, якщо відповідно спроектована методична система навчання. Інтенсифікація і якість навчання будуть досягнуті, якщо: на підставі вимог державних освітніх стандартів розроблені критерії відбору змісту навчання з використанням інформаційних технологій; навчальний процес за основними фаховими дисциплінами буде проектуватися в опорі на едукологічні технології; далі на базі електронних енциклопедій та підручників виділити і запропонувати студентам індивідуальні освітні траєкторії; провести відбір навчального матеріалу, відповідний отриманим критеріям; реалізувати концептуальний підхід до вивчення відібраного матеріалу на основі інтеграції едукологічних та інформаційних технологій. Для активізація діяльності у вказаних напрямках зручно користуватися семантичними мережами. Семантика, якщо не дотримуватись суворих наукових дефініцій, означає сенс слова, дії чи висловлювання, цілого повідомлення або навіть художнього твору. Для наочного зображення семантичних структур використовується граф семантичної мережі (СМ), у ньому ребра позначають відносини між вершинами, відповідними обраним для аналізу значенням. Семантичні мережі з'явилися як модель під час вирішення завдань розбору та розуміння сенсу природної мови. Моделі як СМ активно розвиваються у роботах сучасних дослідників, вбираючи у собі найважливіші властивості інших типів моделей.

Розглянемо приклад семантичної мережі для повідомлення типу "Підприємство здійснило постачання продукції на замовлення клієнта до 1 червня 2022 року в кількості 1000 тонн", яка наведена на рис. 1.



1 – клієнт; 2 – замовлення; 3 – постачання; 4 – постачальник; 5 – продукція;  
6 – одиниць виміру, т; 7 – термін; 8 – календарна дата

**Рис. 1. Приклад семантичної мережі**

На цьому прикладі видно, що між об'єктами Підприємство та Постачання визначено відношення "агент", між об'єктами Продукція та Постачання визначено відношення "об'єкт" тощо.

Число відносин, що використовуються в конкретних семантичних мережах, може бути різне. Неповний список можливих відносин, що використовуються в семантичних мережах для розбору пропозицій, виглядає так.

Агент - те, що (той, хто) викликає дію. Агент часто підлягає пропозиції, наприклад, "**Підприємство** поставило продукцію".

Об'єкт - це те, на що (на кого) спрямована дія. У реченні об'єкт часто виконує роль прямого доповнення, наприклад, "Підприємство виготовило **продукцію**".

Інструмент - той засіб, який використовується агентом для виконання дії, наприклад, "Підприємство виготовило сортовий прокат **на безперервному стані**".

Співагент служить як підлеглий партнер головному агенту, наприклад, "Підприємство доставило прокат **за допомогою залізниць**".

Пункт відправлення та пункт призначення - це відправна та кінцева позиції при переміщенні агента або об'єкта: "Заготовки після безперервного розливання надходять **від МБЛЗ до прокатного стану**".

Траєкторія - переміщення від пункту відправлення до пункту призначення: "Вони (заготівлі) надходять **через проміжну піч до чорнової групи**".

Засіб доставки - то в чому або на чому відбувається переміщення: "Вони переміщуються **рольгангом**".

Розташування - те місце, де відбулося (відбувається, відбуватиметься) дія, наприклад, "Прокатка здійснюється **в чистовій групі**".

Споживач - особа, для якої виконується дія: "Листопрокатний цех відвантажив продукцію **для автозаводу**".

Сировина - це, як правило, матеріал, з якого щось виготовлено або складається. Зазвичай сировина вводиться приводом, наприклад, "Стан 400/200 призначений для прокатки катанки з **безперервнолітої заготовки**".

Час - вказує на момент здійснення дії: "Він закінчив свою роботу **пізно ввечері**".

Найбільш типовий метод виведення в семантичних мережах (СМ) - це метод зіставлення елементів мережевої структури. Це видно на наступному прикладі, наведеному на рис. 2.



Рис. 2. Процедура зіставлення в СМ

З метою підвищення якості математичної підготовки здобувачів була поставлена задача: спроектувати інформаційний навчально-методичний ком-



плекс вивчення розділу "Метод скінчених елементів" інтегрованого курсу "Методи аналізу, моделювання та оптимізації процесів ОМТ". Технологічний підхід передбачає виконання практичних і лабораторних робіт на персональних комп'ютерах. Студенти користуються для виконання розрахунково-графічних і проектних робіт засобами Excel, MathCAD і Qform. Вони отримують результати, будують графіки. Оформлення звітів здійснюється у вигляді роздруківки теоретичної частини, результатів обчислень, графіків і висновків з виконання даної роботи. При цьому студенти користуються методичними вказівками, переведеними в електронний вигляд і включеними в навчальну систему. Методичні вказівки до виконання практичних і лабораторних робіт також використовуються в технологіях дистанційного навчання.

Навчання студентів за допомогою інформаційного навчально-методичного комплексу забезпечує всі види занять в технічному університеті (лекції, семінари, практичні заняття, самопідготовку, практичні і лабораторні заняття, навчальне проектування). За дидактичними цілями навчання комплекс може забезпечити формування знань, повідомлення відомостей, формування умінь, закріплення знань, контроль, засвоєння, узагальнення, вдосконалення навичок та формування компетентностей. Таким чином, технологічний підхід дозволяє більш тонко врахувати міжпредметні зв'язки, інтенсифікувати роботу студентів, домогтися вільного володіння інформаційними технологіями, і, таким чином, підвищити якість навчання. Технологічний підхід вже дав результат: підвищилася якість випускних кваліфікаційних робіт, посилилася їх прикладна професійна спрямованість, а також підвищилася соціально-професійна адаптація випускників.

Потреба більшості здобувачів в ефективній підготовці призводить до пошуку та освоєння методів розв'язання як типових, так і нестандартних завдань. Розв'язання завдань може здійснюватися на заняттях в університеті та за індивідуальної підготовки в результаті самостійної роботи або самоосвіти. У всіх випадках підготовка має бути доступною та результативною, той, хто навчається, повинен бачити перспективу на початку навчання, а також мати можливість зіставляти рівень поточної підготовки із заявленими зразками.

На сучасному етапі стає актуальною спільна діяльність тих, хто навчається та навчає, з розробки плану додаткової підготовки. Складаючи плани занять, фактично розробляється стратегія підвищення рівня підготовки. Тому вивчення тем не може відбуватися хаотично, семантичні мережі можуть допомогти. По-перше, для обраних нових тем має бути встановлено порядок вивчення; а по-друге, всі ці теми необхідно рівномірно розподілити на весь навчальний рік так, щоб вони були узгоджені з вивченим матеріалом з освітніх та професійних програм [11].

Для науково-методичного обґрунтування проектування підготовки природно використати графічне моделювання кластера. Структурне зображення набору тем із своїми взаємозв'язками призводить до побудови графа, тобто до побудови кластера [12].

Графічна деталізація кластера із зображенням взаємозв'язків між темами, прив'язка кластера до тимчасових термінів, позначення місць навчання, у яких можна здобути керівництво чи консультацію з цієї теми перетворюється на розробку тактики підвищення рівня підготовки відповідно до обраного плану. У цей момент кластер може перебудовуватися і, оскільки той, хто навчається, сприймає його як деяке керівництво (алгоритм) майбутньої діяльності, він буде ставитися до алгоритмічного типу. Крім обраних тем, навчання яких продовжується від 2 до 4 годин, можна відокремити розділ з умовною назвою – «програмна суміш». Такий собі набір задач (проблем), які формально знаходяться в рамках програмного матеріалу, але характеризуються незвичайністю формулювань запитань. На кластері обов'язково повинні бути зафіксовані стандартні методи, які є стартом для начала засвоєння нестандартних тем.

Зрозуміло, що графічна модель кластера як структурно-логічна схема має ряд переваг у порівнянні з текстовим викладанням матеріалу. При отриманні матеріалу в виді тексту буває достатньо трудно визначити структуру вивчаємого явища, а також установить суттєві зв'язки між компонентами системи, що ускладнює розуміння та осмислення вивчаємого об'єкту (матеріалу). Однак ці утруднення, особливо при дистанційному навчанні [13], у більшості випадків знімаються при кластерній подачі матеріалу, де взаємозв'язки зображені та проглядаються більш розбірливо.

Наприклад, для дисципліни «Методи аналізу, моделювання і оптимізації процесів ОМТ», включеної до математичної підготовки магістрантів університетів, важливим є метод скінчених елементів. Розглядаємо розділ як підкластер при підготовці методичного забезпечення, плануванні та проведенні аудиторних занять і самостійної роботи (рис. 3).

Побудована графічна модель вивчення розділу «Метод скінчених елементів» виробляє у здобувачів розуміння послідовності викладання навчального матеріалу за тематичним ланцюжком, а також надає студенту алгоритм розв'язання задач, зв'язаних з розбиттям дослідної області на скінченні елементи, знаходженням розв'язків алгебраїчних систем, збіжності отриманих наближень і т. ін., в наочній формі.

Під час магістерської підготовки важливо суттєво розвинути комп'ютерні компетентності майбутніх фахівців при використанні професійних комп'ютерних систем, таких як Qform, Abaqus, ANSYS, DEFORM тощо. Заняття проводяться відповідно до методу проектів (виконання індивідуальних завдань, дослідницьких проектів, кваліфікаційних робіт). Виконання та захист таких робіт – проектна діяльність, яка має бути організована та керована відповідно. Як відомо, вид діяльності вважається проектом, якщо:

- діяльність має комплексний характер;
- обмеження за часом, фінансовими, матеріальними та трудовими ресурсами мають особливе значення у процесі виконання комплексу робіт;
- тривалість та вартість діяльності визначається організацією всього комплексу робіт;

– застосовувані технології, обладнання, а також умови виконання діяльності зорієнтовані на отримання певних результатів і носять помітно унікальний характер.

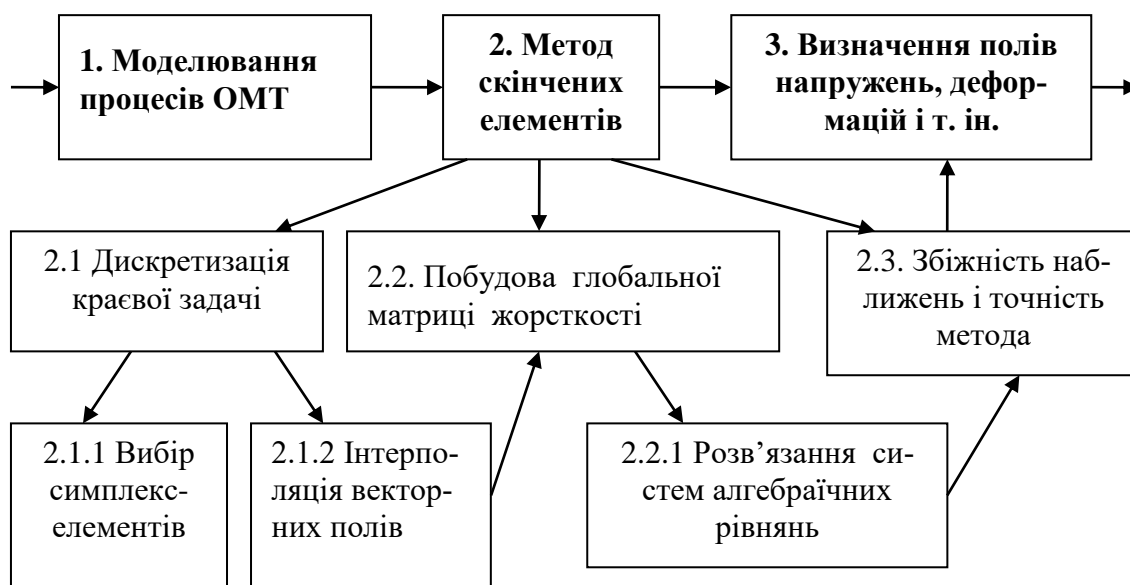


Рис. 3. Графічна модель засвоєння розділу «Метод скінчених елементів»

Очевидно, всі ці умови виконуються для діяльності здобувачів вченого ступеня. З урахуванням викладеного та змісту робіт, їх виконання – реалізація проекту, яка проводиться із залученням системного підходу.

Аналіз діяльності кафедри обробки металів тиском ДДТУ протягом кількох десятиліть показує, що вона, по суті, проводилася відповідно до установок, що концептуально відповідають системному підходу у природній комбінації “жорсткого” та “м’якого” варіантів:

– головне завдання (мета системи, стратегія): підготовка та перепідготовка висококваліфікованих фахівців металургійного виробництва та еліти металургії;

– у науково-технічній діяльності підтримуються рішення та розробки для отримання нових видів та підвищення якості прокатної продукції на основі інтелектуального продукту (навички та цінності);

– обов'язковою умовою організації навчального процесу є залучення студентів до виробничої діяльності та/або наукової роботи під час навчання (системи та процедури);

– також необхідною умовою є розвиток лабораторної та виробничої бази в рамках кафедри та з можливістю інтеграції в межах університету або об'єднання ЗВО;

– пріоритетним видом діяльності є розширення кругозору та підвищення кваліфікації співробітників, відстеження новітніх тенденцій розвитку науки та техніки для їх використання у своїй практиці (якісний склад персоналу);

– у науково-педагогічній та науково-технічній діяльності співробітників дотримуються послідовність та відповідальність у роботі, об'єктивність щодо оцінки результатів (стиль управління);

– відкритість та взаємоповага у відносинах викладачів та студентів, керівників та підлеглих як важливі складові успішної діяльності протягом десятиліть (вертикальна та горизонтальна комунікація).

Науково-педагогічна діяльність на кафедрі у теперішній час визначається роботою наукової школи, яка керується відповідно обраному напрямку «Науково-технічні та едукологічні аспекти обробки металів тиском, удосконалення технології, обладнання та оснащення з аналізом стійкості процесів та сучасних проблем матеріалознавства». Зусилля концентруються на дослідженнях та рішеннях науково-технічних завдань, які породжуються проблемою поздовжньої стійкості процесів прокатки.

За минулі п'ятнадцять років за результатами виконаної роботи опубліковано кілька десятків статей у фахових журналах та збірниках, монографія та навчальний посібник, отримані авторські свідоцтва, готуються нові публікації [14,15]. Методи досліджень, їх зміст та отримані результати обговорювалися на наукових семінарах кафедри, засіданнях студентського наукового гуртка, об'єднаних семінарах університетського рівня для оцінки роботи здобувачів, загальнодержавних та міжнародних наукових, науково-технічних та науково-методичних конференціях, закордонних публікаціях [16]. За матеріалами та результатами дослідницької діяльності минулого десятиріччя з широким використанням математичного моделювання та комп'ютерних розрахунків виконані роботи призерів студентських конкурсів в Україні, здобувачами захищено понад десять кваліфікаційних робіт магістрів та дві дисертації докторів філософії.

**Висновки.** Сучасна підготовка фахівців потребує вдосконалення математизації та системного підходу при модернізації навчання, докорінної перебудови процесу діяльності викладачів та студентів, оновлення методичного забезпечення на інноваційній основі. Едукологія присвячена системним дослідженням та впровадженню їх результатів у освітній галузі. Розглянуто можливості технологічного підходу до інтеграції викладання математичних та профільних дисциплін. Надані умови інноваційного використання математизації та інформаційних технологій з графічним моделюванням для інтеграції зусиль викладачів і здобувачів у навчальному процесі. Використання інноваційних розробок є одним із пріоритетних напрямів розвитку університетської освіти, які дозволяють підвищити професійний рівень викладання окремої дисципліни та усій системи вищої освіти, уникнути перевантаження студентів та викладачів, сприяє творчому розвитку діючих та майбутніх фахівців з отриманням вагомих результатів.

#### **Бібліографічні посилання**

1. Національна модель неоіндустріального розвитку України: монографія за заг. ред. В.П. Вишневського. К.: НАН України, Ін-т економіки промисловості, 2016. 519 с.

2. Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения: монография. К.: Наукова думка, 2011. 727 с.
3. Гуревич Р. С., Кадемія М. Ю., Шевченко Л. С. Інформаційні технології навчання: інноваційний підхід. Навч. посіб. Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2012. 348 с.
4. Новейший философский словарь: сост. А. А. Грицанов. Минск: Изд. Скакун В. М., 1998. 896 с.
5. Гришан И.П. Менеджмент образовательных учреждений. Владивосток, 2002. 200 с.
6. Освітологія: витоки наукового напрямку: монографія/за заг. ред. В. О. Огнев'юка. К.: ВП «Едельвейс», 2012. 336 с.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и проблемы будущего. М.: Наука, 1997. 532 с.
8. Наконечна Т. В., Нікулін О. В. Загальні та спеціальні розділи вищої математики для самостійної роботи студентів інженерних та природничо-наукових напрямків. Навч. посіб. Д: Біла К. О., 2016. 220 с.
9. Тарасевич Ю.Ю. Информационные технологии в математике. М.: СОЛОН-Пресс, 2003. 592 с.
10. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в MathCAD 14. СПб: Питер, 2007. 592 с.
11. Салов В.О. Основы педагогіки вищої школи. навч. посіб. Д: Національна гірнична академія України, 2003. 183 с.
12. Совертков П.И. Формирование причинно-следственных связей на кластере по математике. *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*. 2014. № 16. С. 258-266.
13. Дистанційне навчання: психологічні засади: монографія за ред. Смульсон Ю.І., Кіровоград: Імекс-ЛТД, 2012. 240 с.
14. Максименко О.П., Лобойко Д.И., Измайлова М.К. Продольная устойчивость полосы в валках с анализом контактных условий: монография. Днепродзержинск: ДГТУ, 2016. 213 с.
15. Максименко О.П., Нікулін О.В., Самохвал В.М. Системний підхід, методи досліджень процесів прокатування з аналізом поздовжньої сталості: навч. посіб. Кам'янське: ДДТУ, 2021. 347 с.
16. Nikulin A., Nakonechnaya T., Peremitko V. System approach in modeling and research of metal processes. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2021. 105 p.

*Надійшла до редколегії 18.08.2022.*

**Н.І. Послайко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНОГО РЕЖИМУ В СИСТЕМІ  
МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ  $M/M/m$   
З УРАХУВАННЯМ ЕКОНОМІЧНОГО ЕФЕКТУ  
ВІД ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАЯВОК**

Пропонується підхід до розрахунку ймовірностей станів в перехідному режимі не-однорідної за часом системи масового обслуговування типу  $M/M/m$ . Процес обслуговування представлений у вигляді двовимірного марковського процесу, перша компонента якого співпадає з числом заявок у системі в кожен момент часу  $t$ , а друга – з величиною доходу, отриманого до моменту  $t$ .

**Ключові слова:** система масового обслуговування, марковський процес, перехідний режим, інтегральне перетворення, твірна функція.

**N.I. Poslaiko**

*Oles Honchar Dnipro National University*

**RESEARCH OF THE TRANSITION MODE IN A QUEUE SERVICE  
SYSTEM OF THE TYPE  $M/M/m$  WITH CONSIDERING  
THE ECONOMIC EFFECT FROM SERVICE OF APPLICATIONS**

The paper considers a generalization of a system with an unlimited queue for the case when applications entering the system bring some economic effect, for example, income. The incoming flow of requirements is an extraordinary non-stationary Poisson process. Applications are processed in the order in which they are received. Since the flow of applications is not ordinary, applications can come in groups, and not just one at a time. It is assumed that the order of arrival for service of applications that arrived in one group is arbitrary. Each device can serve only one request at a time. Applications are serviced according to an exponential law with a parameter that is a continuous function of time. If an order occupies the device at the moment  $t$  of time and  $\Delta t \downarrow 0$ , then the probability that it will release the device by the moment  $t + \Delta t$  is equal to  $\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$ . The basic assumption about the nature of the service is that the "revenues" that are received from the service of different requests are independent

The service process is represented by a two-dimensional Markov process  $\delta(t) = (\xi(t), \eta(t))$ , where  $\xi(t)$  it coincides with the number of applications in the system (in the queue and in service) at the time moment  $t$ , and  $\eta(t)$  – with the amount of income received by this moment,  $\eta(t) \in R^l$ . Service process state probabilities  $P_k(t, A) = P(\xi(t) = k, \eta(t) \in A)$ , where  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $A$  is the Borel set from  $R^l$ ,

the integral transformations are put in correspondence  $q_k(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z,x)} P_k(t, dx)$ . Using the total probability formula, differential equations are derived that are satisfied by  $q_k(t, z)$ . Using the generating function  $q(t, z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t, z) \theta^k$  ( $0 < |\theta| \leq 1$ ) the system of differential equations for  $q_k(t, z)$  is reduced to one differential equation. To find its solution through the given characteristics of the system, an auxiliary process is used  $\delta^*(t)$ , which, in contrast  $\delta(t)$ , is homogeneous not only in the second, but also in the first component. The generating function  $\delta^*(t)$  is known. It is used to find expressions for  $q_k(t, z)$ .

**Key words:** queuing system, Markov process, transitional regime, integral transformation, generating function.

**Н.И. Послайко**

*Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $M/M/m$ С УЧЕТОМ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ОТ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК

Предлагается подход к расчету вероятностей состояний в переходном режиме неоднородной по времени системы массового обслуживания типа  $M/M/m$ . Процесс обслуживания представлен в виде двумерного марковского процесса, первая компонента которого совпадает с числом требований в системе в каждый момент времени  $t$ , а вторая – с величиной дохода, полученного к моменту  $t$ .

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, марковский процесс, переходной режим, интегральное преобразование, производящая функция.

**Вступ.** В математичних моделях систем масового обслуговування ефективність їх роботи характеризується різними показниками в залежності від типу систем – це в першу чергу пропускна здатність системи (абсолютна і відносна), середня довжина черги та середній час перебування заявок в черзі, ймовірність відмови в обслуговуванні та багато інших [1]. В реальних системах масового обслуговування іноді виникають ситуації, коли при обслуговуванні заявок отримують певний економічний ефект, дохід, який належало б враховувати при математичному описанні системи. Так, наприклад, у нафтопереробній промисловості на переробні підприємства нафта надходить порціями, які певним чином обробляються. Внаслідок цієї переробки одержують різноманітні нафтопродукти, такі як мазут, бензин, гас, авіаційне паливо та інші. Переробка нафти приносить переробним підприємствам певний прибуток, який залежить від обсягів нафти, яка надходить на ці підприємства. Процес надходження нафти та її переробки не є строго детермінованим, залежить від впливу багатьох факторів. Це призводить до того, що величина прибутку як функція часу теж не є строго детермінованою і при математичному описі її

доцільно розглядати як випадковий процес. При побудові математичних моделей реальних процесів використовують різні підходи в залежності від поставлених задач. Наприклад, в [2] деякі економічні процеси моделюються ланцюгами Маркова, в яких кожен перехід із стану в стан супроводжується доходом.

У даній роботі розглядається математична модель системи масового обслуговування з урахуванням економічного ефекту при наступних припущеннях. Потік заявок, які надходять на обслуговування, вважається пуассонівським неординарним. Заявки обслуговуються  $m$  приладами; кожен прилад одночасно може обслуговувати тільки одну заявку; якщо заявка надходить, коли всі прилади зайняті обслуговуванням, то вона стає в чергу. Дисципліна черги – в порядку надходження (хто першим прийшов, той першим і обслуговується). Оскільки потік заявок неординарний, то на обслуговування заявки можуть прибувати групами, а не тільки по одній. Припускається, що порядок надходження на обслуговування заявок, які прибули в одній групі, довільний. Обслуговування відбувається згідно з експоненційним розподілом. Число місць очікування і час очікування для заявок, які стоять в черзі, вважаються необмеженими.

Відомо, що в багатьох реальних СМО (економічних, технічних) помітну роль відіграють нестационарні явища. У цьому випадку інтенсивність вхідного потоку заявок та інтенсивність обслуговування є функціями часу, часто періодичними. Наприклад, інтенсивність потоків пасажирів, вантажів, заявок на ремонтні роботи змінюються протягом доби, в залежності від сезону і т. і. У пропонованій математичній моделі і інтенсивність надходження заявок, і інтенсивність обслуговування є функціями часу.

Для розглядуваної математичної моделі пропонується підхід для визначення ймовірностей станів процесу обслуговування в перехідному режимі.

**Постановка задачі.** Позначимо через  $\alpha(t, s)$  число заявок, які надійшли в систему в проміжку  $(t, s)$ . Тоді в припущенні, що вхідний потік неординарний і нестационарний, при  $\Delta t \rightarrow 0$  матимемо:

$$P\{\alpha(t, t + \Delta t) = k\} = \lambda_k(t) \Delta t + o(\Delta t), \quad k \geq 1, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0. \quad (1)$$

Тут  $\lambda_k(t)$  – інтенсивність надходження в систему  $k$  заявок в момент  $t$ .

Нехай функції  $\lambda_k(t)$  є неперервними і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t) = \lambda(t)$

збігається рівномірно на  $[0, \infty)$ . Із (1) випливає:

$$M\theta^{\alpha(t,s)} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{\alpha(t,s) = k\} \theta^k = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \theta^k) \int_t^s \lambda_k(u) du\right\} \quad (|\theta| = 1). \quad (2)$$

Покладемо

$$p_k(t, s) = P\{\alpha(t, s) = k\}, \quad k \geq 0.$$



Згідно з (2) маємо:

$$p_0(t, s) = \exp \left\{ - \int_t^s \lambda(u) du \right\},$$

$$p_n(t, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\theta|=1} \frac{\exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \theta^k) \int_t^s \lambda_k(u) du \right\}}{\theta^{n+1}} d\theta, \quad n > 0.$$

Будемо вважати також, що обслуговування відбувається згідно з показниковим розподілом, параметр якого є неперервною функцією часу. Якщо заявка береться на обслуговування в момент  $t$  і  $\Delta t \downarrow 0$ , то ймовірність того, що вона звільнить прилад до моменту  $t + \Delta t$ , дорівнює  $\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$ .

Заявки, які надходять в систему, в процесі обслуговування приносять деякий дохід. Випадковий процес, що співпадає в кожен момент часу з величиною доходу, отриманого до моменту  $t$ , позначимо через  $\eta_t$ . Нехай  $\eta_t$  набуває значень з  $R^l$ .

Основне припущення відносно характеру обслуговування буде полягати в тому, що «доходи», які отримують від обслуговування різних заявок, не залежать один від одного.

Розглянемо двовимірний процес  $\delta_t = \{\xi_t, \eta_t\}$ , де  $\xi_t$  – число заявок в системі в момент  $t$  (в черзі і на обслуговуванні),  $\xi_t \in N^+ = (0, 1, 2, \dots)$ .

Нехай

$$\varphi^r(t, z) = Me^{i(z, \gamma^r(t))}, \quad r \geq 1, \quad \varphi_r^-(t, z) = Me^{i(z, \gamma_k^-(t))},$$

$$Me^{i(z, \sigma_k(s) - \sigma_k(t))} = \exp \left\{ \int_t^s \rho_k(u, z) du \right\}, \quad k \geq 0$$

$$\left( \varphi_k^-(t, z) = \varphi^-(t, z), \quad \rho_k(t, z) = \rho(t, z), \quad k \geq m \right),$$

де  $\int_t^s \rho_k(u, z) du$  – логарифм характеристичної функції (по  $z$ ) деякого безмежно подільного розподілу, зосередженого в  $R^l$ . Відомо [3], що

$$\int_t^s \rho_k(u, z) du = ia_k(t, s) - \frac{1}{2}(A_k(t, s)z, z) +$$

$$+ \int_{R^l} \left( e^{i(z, x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1 + i(x, x)} \right) \frac{1 + (x, x)}{(x, x)} G_k(t, s, dx)$$

(формула Леві-Хінчина).

Тут  $a_k(t, s) \in R^l$ ,  $A_k(t, s)$  – невід’ємно визначена  $l \times l$  матриця,  $G_k(t, s, dx)$  – скінченна міра на множині всіх  $l$ -вимірних борелівських множин.

Покладемо

$$P_k(t, A) = P(\xi(t) = k, \eta(t) \in A),$$

$$q_k(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z, x)} P_k(t, dx),$$

де  $A$  – борелівська множина із  $R^l$ .

Будемо називати марковський процес  $\delta_t$ , однорідний за другою компонентою, основним процесом обслуговування в системі обслуговування  $M_t/M_t/m$  з урахуванням економічного ефекту ( $\delta_t \in N^+ \times R^l$ ), якщо в проміжку  $(t, t + \Delta t)$  для нього можливі переходи:

$$(k, x) \xrightarrow{(t, t+\Delta t)} \begin{cases} (k, x + \sigma_k(t + \Delta t) - \sigma_k(t)) : 1 - (\lambda(t) + k\mu(t))\Delta t + o(\Delta t), \\ (k + r, x + \gamma^r(t)) : \lambda_r(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ (k - 1, x + \gamma_k^-(t)) : k\mu(t)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

$0 \leq k \leq m - 1;$

(3)

$$(k, x) \xrightarrow{(t, t+\Delta t)} \begin{cases} (k, x + \sigma_k(t + \Delta t) - \sigma_k(t)) : 1 - (\lambda(t) + m\mu(t))\Delta t + o(\Delta t), \\ (k + r, x + \gamma^r(t)) : \lambda_r(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ (k - 1, x + \gamma^-(t)) : m\mu(t)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

$k \geq m, r \geq 1.$

Тут  $\gamma_k^-(t)$ ,  $\gamma^r(t)$  – стрибки неперервної компоненти  $\eta_t$ , які відповідають стрибкам дискретної компоненти  $\xi_t$  із стану  $k$  вниз та вгору відповідно. Якщо ж  $\xi_t$  в  $(t, t + \Delta t)$  не змінює свого значення, то дохід, отриманий в процесі обслуговування до моменту  $t$ , збільшиться за час  $\Delta t$  на величину  $\sigma_k(t + \Delta t) - \sigma_k(t)$  ( $\sigma_0(t + \Delta t) - \sigma_0(t) = 0$ ).

Задача полягає в знаходженні розподілу процесу  $\delta_t$ .

**Розподіл процесу  $\delta_t$ .** За формулою повної ймовірності згідно з (3) маємо:

$$q_k(t, z) = q_k(t - \Delta t, z) [1 - (\lambda(t) + \min(k, m)\mu(t))\Delta t] [1 + \rho_k(t, z)\Delta t] +$$

$$+ q_{k+1}(t - \Delta t, z) \min(k + 1, m)\mu(t)\varphi_{k+1}^-(t, z) +$$

$$+ \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} q_j(t - \Delta t, z) \lambda_{k-j}(t) \varphi^{(k-j)}(t, z) + o(\Delta t),$$

(4)

звідки

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_k(t, z)}{\partial t} &= [\rho_k(t, z) - \lambda(t) - \min(k, m)\mu(t)]q_k(t, z) + \\ &+ \min(k+1, m)\mu(t)\varphi_{k+1}^-(t, z)q_{k+1}(t, z) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{k-j}(t)\varphi^{(k-j)}(t, z)q_j(t, z), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Вираз  $1 + \rho_k(t, z)\Delta t + o(\Delta t)$  з'явився в (4) з огляду на такі рівності:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \rho_k(u, z) du &= \rho_k(t, z), \\ \exp \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \rho_k(u, z) du \right\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left( \int_t^{t+\Delta t} \rho_k(u, z) du \right)^i = \\ &= 1 + \rho_k(t, z)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Введемо твірну функцію

$$q(t, z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t, z)\theta^k \quad (0 < |\theta| \leq 1),$$

і будемо вважати, що в початковий момент часу  $t_0$  основний процес знаходиться в стані  $(j, x_0)$ . Тоді із (4) для визначення  $q(t, z, \theta)$  отримаємо задачу Коші:

$$\frac{\partial q(t, z, \theta)}{\partial t} = h(t, z, \theta)q(t, z, \theta) + \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k(t, z, \theta)q_k(t, z) \quad (5)$$

з початковою умовою

$$q(t_0, z, \theta) = \theta^j e^{i(z, x_0)}. \quad (6)$$

В (5) функції  $h(t, z, \theta)$  і  $\varepsilon_k(t, z, \theta)$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} h(t, z, \theta) &= \rho(t, z) - \lambda(t) - m\mu(t) + \frac{m\mu(t)\varphi^-(t, z)}{\theta} + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r(t)\varphi^{(r)}(t)\theta^r, \\ \varepsilon_k(t, z, \theta) &= \rho_k(t, z) - \rho(t, z) - (m-k)\mu(t) + \\ &+ \frac{\mu(t)}{\theta} (k\varphi_r^-(t, z) - m\varphi^-(t, z)), \quad 0 \leq k < m. \end{aligned}$$

**Описання допоміжного процесу.** Основний процес обслуговування  $\delta(t)$  є неоднорідним за першою компонентою. Для знаходження ймовірностей станів  $\delta(t)$  використаємо допоміжний процес  $\delta^*(t)$ , який при  $\xi(t) \geq m$  співпа-

дає з  $\delta(t)$ , але на відміну від  $\delta(t) \in$  однорідним не тільки за другою компонентою, але і за першою.

Нехай  $\delta^*(t) = \{\xi_t^*, \eta_t^*\}$  –марковський процес, дискретна компонента якого набуває значень з множини  $N = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k, \dots\}$ , а  $\eta_t^* \in R^l$ , і

$$M \theta^{\xi_s^* - \xi_t^*} e^{i(z, \eta_s - \eta_t)} = \exp \left\{ \int_t^s h(u, z) du \right\}. \quad (7)$$

Якщо позначити

$$M \left( e^{i(z, \eta_s^* - \eta_t^*)}, \xi_s^* - \xi_t^* = k \right) = a_k^{[t, s]},$$

то (7) означає, що

$$\begin{aligned} a_k^{[t, \Delta t]}(z) &= \lambda_k(t) \varphi^{(k)}(t, z) \Delta t + o(\Delta t), \quad k \geq 1, \\ a_{-1}^{[t, \Delta t]}(z) &= m \mu(t) \varphi^-(t, z) \Delta t + o(\Delta t), \\ a_0^{[t, \Delta t]}(z) &= [1 - (\lambda(t) + m \mu(t)) \Delta t] [1 + \rho(t, z) \Delta t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\sum_{k \in N} a_k^{[t, s]}(z) \theta^k = \exp \left\{ \int_t^s h(u, z, \theta) du \right\},$$

функції  $q_k(t, z)$  можна знайти з (4)-(5) наступним чином.

Формально проінтегруємо рівняння (4), отримаємо:

$$\begin{aligned} q(t, z, \theta) &= \exp \left\{ \int_{t_0}^t h(u, z, \theta) du \right\} \left( \theta^j e^{i(z, x_0)} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_0}^t \exp \left\{ - \int_{t_0}^v h(u, z, \theta) du \right\} \varepsilon_k(v, z, \theta) q_k(v, z) dv, \end{aligned} \quad (8)$$

звідки

$$\begin{aligned} q_r(t, z) &= e^{i(z, x_0)} a_{r-j}^{[t_0, t]}(z) + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_0}^t \left\{ Q_k(v, z) a_r^{[v, t]}(z) + \mu(v) [k \varphi_k^-(v, z) - m \varphi^-(v, z)] a_{r+1}^{[v, t]}(z) q_k(v, z) \right\} dv, \end{aligned} \quad (9)$$

$$Q_k(v, z) = \rho_k(v, z) - \rho(v, z) + (m - k) \mu(v).$$

**Визначення функцій  $q_k(t, z)$ .** Для повного розв'язання задачі залишається визначити функції  $q_k(t, z)$  при  $0 \leq k \leq m - 1$ . Що стосується цих функцій, то вони згідно з (9) задовольняють систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з неперервним ядром (з огляду на передбачену в моделі неперервність інфінітезимальних характеристик та властивості характеристичної

функції [4]). Останню систему будемо розв'язувати методом послідовних наближень на деякому відрізку  $[t_0, t]$ . Покладемо

$$\begin{aligned} \bar{q}(t, z) &= (q_0(t, z), q_1(t, z), \dots, q_{m-1}(t, z)), \\ \bar{a}_j(t_0, t, z) &= \left( a_{-j}^{[t_0, t]}(z), a_{-j+1}^{[t_0, t]}(z), \dots, a_{-j+m-1}^{[t_0, t]}(z) \right), \\ A(v, t, z) &= (a_{kr}(v, t, z), 0 \leq k, r \leq m-1), \\ a_{kr}(v, t, z) &= [\rho_k(v, z) - \rho(v, z) + (m-k)\mu(v)] a_r^{[v, t]}(z) + \\ &+ \mu(v) [k\varphi_k^-(v, z) - m\varphi^-(v, z)] a_{r+1}^{[v, t]}(z), \end{aligned}$$

тоді із (9) отримаємо:

$$\bar{q}(t, z) = e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z) + \int_{t_0}^t \bar{q}(v, z) A(v, t, z) dv. \tag{10}$$

Якщо

$$\bar{q}_0(t, z) = e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z),$$

.....

$$\bar{q}_n(t, z) = e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z) + \int_{t_0}^t \bar{q}_{n-1}(v, z) A(v, t, z) dv,$$

то

$$\begin{aligned} \bar{q}_n(t, z) &= e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, u_k, z) \prod_{l=1}^k A(u_l, u_{l+1}, z) du_l \quad (u_{k+1} = t). \\ &t_0 < u_1 < \dots < u_k < t \end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned} \bar{X}(v, z) &= (x_k(t, z), 0 \leq k \leq m-1), \\ \|\bar{X}\| &= \sup_{k, v \in [t_0, t]} |x_k(t, z)|, \\ \|\bar{A}\| &= \sup_{k, v \in [t_0, t]} \sum_r |a_{kr}(v, t, z)| < \infty. \end{aligned} \tag{11}$$

За умови (11) границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{q}_n(t, z) = \bar{q}(t, z)$$

існує [5] і задовольняє рівняння (10), причому

$$\|\bar{q} - \bar{q}_n\| \leq e^{\|A\|(t-t_0)} \frac{[\|A\|(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким чином, має місце наступне твердження.

**Теорема.** Якщо інфінітезимальні характеристики процесу  $\delta_t$  неперервні, то перетворення

$$q(t, z, \theta) = \sum_{k \in N^+} \theta^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z,x)} P_k(t, dx) \quad (0 < |\theta| \leq 1)$$

його перехідних ймовірностей визначається формулою (8), де

$$\begin{aligned} (q_0(t, z), \dots, q_{m-1}(t, z)) &= \bar{q}(t, z) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, u, z) \prod_{l=1}^k A(u_l, u_{l+1}, z) du_l + \\ &\quad t_0 < u_1 < \dots < u_k < t \quad (12) \\ &+ e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z) \quad (u_{k+1} = t). \end{aligned}$$

Ряд в правій частині (12) збігається за нормою:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int \dots \int e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, u, z) \prod_{l=1}^k A(u_l, u_{l+1}, z) du_l + \right. \\ \left. t_0 < u_1 < \dots < u_k < t \right. \\ \left. + e^{i(z, x_0)} \bar{a}_j(t_0, t, z) \right\| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\|A\|(t-t_0))^k}{k!} = e^{\|A\|(t-t_0)}. \end{aligned}$$

**Висновки.** У роботі запропонована математична модель системи масового обслуговування з урахуванням економічного ефекту від обслуговування заявок, а також наводиться підхід до знаходження ймовірнісних характеристик процесу обслуговування в перехідному режимі.

#### Бібліографічні посилання

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. М.: URSS, 2013. – 400 с.
2. Соколов Г.А., Чистякова Н.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 248 с.
3. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей та випадкових процесів. Київ: «Вища школа», 1975. 296 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Книжный дом «Либроком», 2011. 488 с.
5. Смирнов В.Л. Курс высшей математики, т.4. М.: «Наука». 1974. 336 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2022.

**О.П. Соф'їн, А.Є. Шевельова**

*Дніпровський національний університет ім. О. Гончара*

## **РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ГЕНЕРАЦІЇ КЕРУЮЧИХ СКІНЧЕННИХ АВТОМАТІВ МІЛІ В ЗАДАЧІ ПРО ШТУЧНОГО МУРАХУ**

Запропоновано алгоритм спільного використання генетичних алгоритмів та скінченних автоматів для розв'язання задачі про штучну мураку. Виконано обчислювальні експерименти, що демонструють ефективність цього алгоритму.

**Ключові слова:** скінченний автомат, генетичний алгоритм, проблема штучної мурахи, роботизоване планування шляху.

**O.P. Sofin, A.E. Sheveleva**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **DEVELOPMENT THE GENERATION ALGORITHM OF CONTROLLING MEALY MACHINE IN THE ARTIFICIAL ANT PROBLEM**

Planning in the field of artificial intelligence and robotics requires finding a plan that receives information from sensors about the state of various objects in the system, and then uses this information to select a sequence of actions that change the state of objects in the system. An example in which the automatic construction of the logic of an entity with complex behavior is of crucial importance is one of the classic problems of the joint use of genetic algorithms and finite state machine – the problem of the "Artificial Ant". We have a difficult task for an artificial ant trying to follow a strictly defined, irregular, indirect and discontinuous path. Using a genetic algorithm, you need to build a Mealy machine, which represents the logic of the behavior of an artificial ant.

Two paths specially designed for the artificial ant problem were considered: John Muir Trail, Santa-Fe Trail. The ant is placed in a two-dimensional toroidal grid. The ant control system is built as a finite state machine.

To use a finite state machine as a chromosome, it must be coded. In order to build a genetic algorithm based on finite state machine, the genome must be coded into a string of bits. An encoding used in a genetic system where the finite state machine is an array of tables in which each state, input, and movement has an arbitrarily assigned binary value. To unambiguously define a finite state machine, it is enough to specify the initial state and list in canonical order the columns of the state to which the state machine goes and the output action of the table. Since the actual finite state machine of the genetic system has up to 32 states (requiring 5 bits), the actual length of the genome is  $32 * 2 * (5 + 2) = 448$  bits. It is worth noting that the presence of 32 states does not mean that all of them will be used. There may also be unreachable or unvisited states by the artificial ant during its simulation.

The important step in preparing to use a genetic algorithm is to define a fitness function. The usefulness of a particular 453-bit string in this problem simply comes down to how many of its ant appear in a reasonable amount of time if its actions are controlled by the finite state machine represented by the 453-bit string. The maximum number of time steps is set because we want to include Mealy machine that search all 1024 squares on the grid

using a random walk or as a mosaic pattern. That is why the limit of 200 hourly steps is set. If an ant has a "timeout", its fitness is simply the amount of food eaten up to that point. So, fitness ranges from 0 to 89.

A software implementation of the algorithm for building Mealy machine controlling the behavior of an artificial ant was developed. The result of the work of the program according to the genetic algorithm is as follows: starting from the 90-th generation, the ant began to complete the path in 200 steps.

**Keywords:** finite state machine, genetic algorithm, artificial ant problem, robotic path planning.

**А.П. Софьин, А.Е. Шевелёва**

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ МИЛИ В ЗАДАЧЕ ОБ ИСКУССТВЕННОМ МУРАВЬЕ**

Предложен алгоритм совместного использования генетических алгоритмов и конечных автоматов для решения задачи искусственного муравья. Выполнены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность этого алгоритма.

**Ключевые слова:** конечный автомат, генетический алгоритм, проблема искусственного муравья, роботизированное планирование пути.

**Вступ.** Планування у сфері штучного інтелекту та робототехніки вимагає пошуку плану, який отримує інформацію від датчиків про стан різних об'єктів у системі, а потім використовує цю інформацію для вибору послідовності дій, які змінюють стан об'єктів у системі. Прикладом, в якому автоматична побудова логіки сутності зі складною поведінкою має вирішальне значення є одна з класичних задач спільного використання генетичних алгоритмів та скінченних автоматів – задача про «Штучного мураха».

Скінченні автомати – модель управління прийняттям рішень для систем із скінченною кількістю станів.

Скінченим автоматом Мілі (Mealy machine) називається шістька об'єктів:  $\mathcal{A} = \langle S, X, Y, s_0, \delta, \lambda \rangle$ , де:

$S$  – скінчена непорожня множина внутрішніх станів;

$X$  – скінчена непорожня множина вхідних символів (вхідний алфавіт);

$Y$  – скінчена непорожня множина вихідних символів (вихідний алфавіт);

$s_0 \in S$  – початковий стан;

$\delta: S \times X \rightarrow S$  – функція переходів;

$\lambda: S \times X \rightarrow Y$  – функція виходів.

Існують як мінімум два простих способи реалізації скінченного автомата:

- діаграма станів (або граф переходів) – графічне представлення множини станів і функції переходів. Являє собою орієнтований граф. Якщо перехід зі стану  $s_1$  в  $s_2$  може бути здійснений по одному з декількох символів, то всі вони повинні бути над дугою діаграми;
- таблиця переходів – табличне представлення функції  $\delta$ . Зазвичай в такій таблиці кожному рядку відповідає один стан і один допустимий вхідний



символ. В клітинці на перетині рядка і стовпця записується стан, в який повинен перейти автомат.

У подальшому будемо використовувати табличний спосіб представлення скінченного автомата.

Генетичні алгоритми – це сімейство алгоритмів, які використовують деякі генетичні принципи, що наявні в природі, для розв’язання конкретних обчислювальних задач. Протягом більш ніж чотирьох десятиліть генетичні алгоритми (GA) виявилися дуже потужним і також дуже загальним інструментом для розв’язання задач навчання в нейронних мережах, пошуку найкоротшого шляху, проблеми комівояжера, у стратегії ігор, в задачах, подібних до транспортної задачі, задачі визначення параметрів системи, оптимізації запитів до бази даних, хімії, біології, неврології, теорії автоматів тощо.

У роботі [1] розробили складне завдання для «штучної мурахи», який намагається пройти слідом і отримали примітне рішення у вигляді як кінцевого автомата, так і багатопарової рекурентної нейронної мережі для управління рухами мурахи. Ці дослідження були узагальнені в роботах [2–4]. Розв’язання задачі побудови скінчених автоматів повним перебором є вкрай трудомістке. Тому для побудови скінчених автоматів у задачах такого роду доцільно застосовувати генетичні алгоритми [5–11].

**Постановка задачі.** Маємо складне завдання для штучного мурахи, що намагається пройти строго визначену, нерегулярну, непряму і розривну стежку. За допомогою генетичного алгоритму потрібно побудувати скінченний автомат Мілі, який представляє логіку поведінки штучного мурахи.

Розглядалися дві спеціально спроектовані для задачі про штучного мурахи стежки. Мураха розміщується в двовимірній тороїдальній сітці  $32 \times 32$ .

На рис. 1 наведено приклад «стежки Джона Мюїра» (John Muir Trail) [1]. Вона містить 89 шматочків їжі, 20 поворотів, 4 одинарні проміжки, 7 подвійних проміжків і 7 потрійних проміжків і має загальну довжину 128. Сітка є тороїдальною, тому якщо мураха відходить від краю сітки, вона знову з’являється і продовжує рух на протилежному краю.

Введено обмеження, що мураха має з’їсти всю їжу за 200 або менше ходів.

Чорним кольором зображені комірки із їжею. Порожні комірки на «стежці» зображені сірим кольором. Сірі комірки невидимі для мурахи.

«Стежка Санта-Фе» (Santa Fe Trail) – це нерегулярна звивиста стежка (рис. 2), що складається з 89 харчових гранул. Довжина траси становить 144 клітини та містить 21 поворот. Стежка Санта-Фе, розроблена Крістофером Ленгтоном [2], є дещо складнішою, ніж «стежка Джона Мюїра».

Перед першим кроком мураха знаходиться у верхній лівій клітинці і дивиться направо. У нього є сенсор, який дозволяє йому визначити, чи є їжа в клітинці, що знаходиться безпосередньо перед ним. За хід мураха може зробити одну з таких трьох дій – рухатися вперед на один крок, повернутись ліворуч, повернутись праворуч. Щоб з’їсти їжу в клітинці, необхідно потрапити до неї. Після цього клітинка з їжею вважається порожньою і стає для мурашки невідмінною від спочатку порожніх клітинок. Мураха живий протягом гри

– їжа не є необхідним ресурсом для його існування. Жодних інших персонажів, крім мурахи, на полі немає. Мураха може ходити по будь-яких клітинках поля.

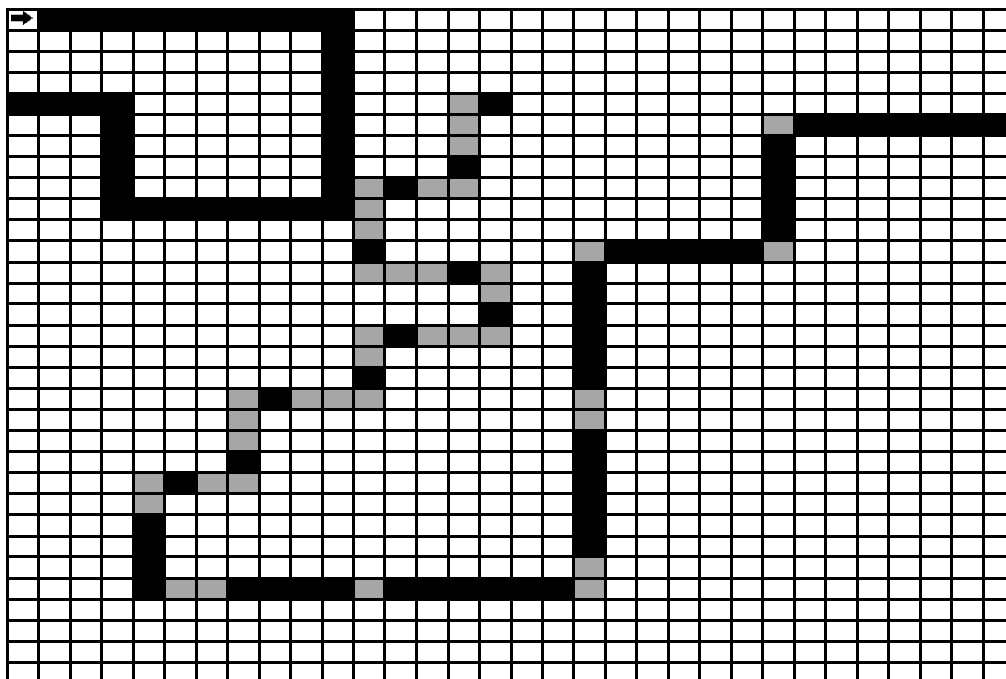


Рис.1

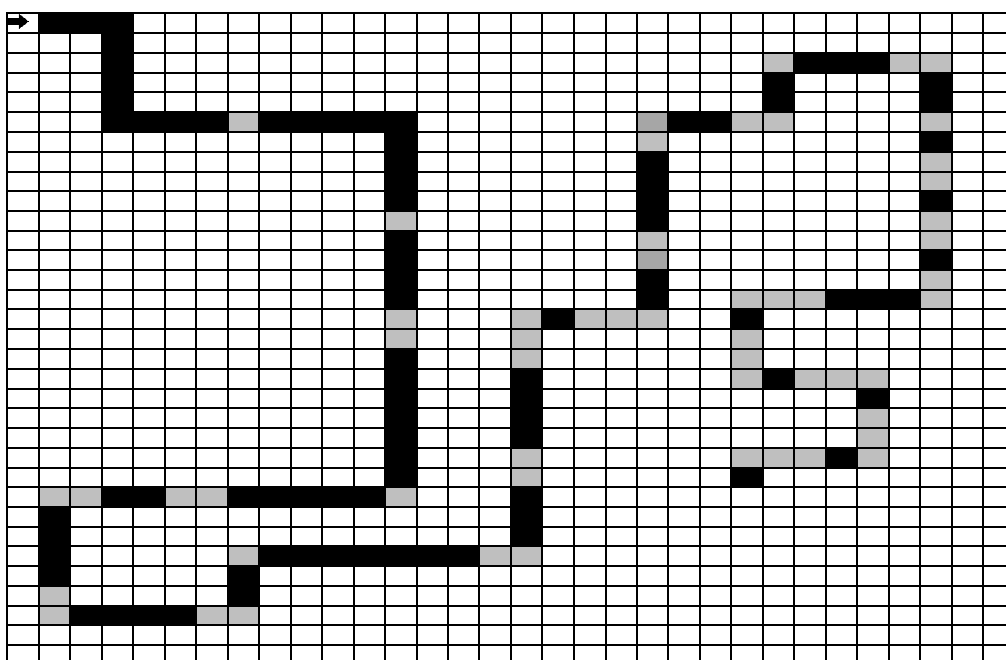


Рис. 2

Система управління мурахою будується як скінченний автомат. Такий автомат має дві вхідні події – 1 (наступна клітинка містить їжу), 0 (наступна клітинка порожня) і три вихідні дії: *L* (повернути ліворуч), *R* (повернути праворуч) і *M* (зробити крок уперед) та переходить у новий стан.

Щоб використовувати скінченний автомат як хромосому, він повинен бути закодований. Для того, щоб побудувати генетичний алгоритм на базі скінченних автоматів, геном повинен бути закодований у рядок бітів. Кодування, використане в генетичній системі, де скінченний автомат є масивом таблиці, в якій кожному стані, вводу та переміщенню є довільно призначене двійкове значення. Щоб однозначно визначити скінченний автомат, достатньо вказати початковий стан та перерахувати у канонічному порядку стовпці стану, в який переходить скінченний автомат та вихідну дію таблиці. Оскільки фактичний скінченний автомат генетичної системи має до 32 станів (для яких потрібно 5 біт), то фактична довжина геному складає  $32 * 2 * (5 + 2) = 448$  біт. Варто зазначити, що наявність 32 станів не означає, що всі вони будуть використані. Також можуть бути недосяжні або не відвідувані стани штучним мурахою під час його моделювання.

Другим важливим кроком у підготовці до використання генетичного алгоритму є визначення функції пристосованості (показника придатності), який визначає, наскільки добре певний рядок бере участь у розв'язанні проблеми. Придатність конкретного 453-бітного рядка в цій задачі просто полягає в тому, скільки їжі мураха з'їдає за розумний проміжок часу, якщо його діями керує скінченний автомат, представлений 453-бітним рядком. Максимальна кількість часових кроків встановлюється тому, що ми хочемо виключити автомати, які шукають усі 1024 квадрати на сітці за допомогою випадкового блукання або як мозаїчний візерунок. Тому і встановлений ліміт у 200 часових кроків. Якщо мурашка має «тайм-аут», її придатність – це просто кількість їжі, з'їденої до цього моменту. Отже, придатність коливається від 0 до 89.

Функція пристосованості визначається формулою:

$$f(x_i) = n,$$

де  $n$  – кількість знайденої їжі.

**Чисельні результати та їх обговорення.** Чисельні експерименти були виконані для популяції 65536 бітових рядків випадкових бітів довжиною 448 одиниць. Фактично розмір популяції є довільним, тому варто звернути увагу на баланс кількості геномів та обчислювальних можливостей конкретного комп'ютеру.

Кожен бітовий рядок декодується у скінченний автомат, і всі 65536 геному виконуються за 200 дій на окремих копіях шляху. В кінці кожного покоління всі мурахи обираються за успіхом. Мурахи, які набрали найвищі бали у своєму поколінні (від 1% до 10% відбірної фракції), відбираються для розведення (мутацій та схрещень), а всі інші відкидаються. Рядки розвиваються довільно. Тоді нове покоління виробляється за наступною процедурою.

1) Об'єднання: 65536 геномів у вигляді скінченних автоматів вибираються випадковим чином (із заміною) з обраної фракції. Не надається перевага тим мурахам, які набрали вищі показники, ніж інші у вибраній фракції.

2) Схрещення: З кожної пари будується по одному скінченному автомату випадковим чином обираючи певний біт з якогось із геномів. Імовірність ви-

бору біту становить від 0,5% до 1,0% на біт, тому середня кількість кросоверів на мурашник за покоління становить 2,25 до 4,5. Схрещування виконується у бітовому рядку.

3) Випадкова мутація: Скінченний автомат змінюється випадковими чином, заміною бітів, знову з ймовірністю від 0,1% до 1% за біт. Таким чином, середня кількість мутацій також становить від 0,225 до 2,25 за мурашку на покоління.

Було побудовано геном на базі скінченного автомату, що закодований бітовим рядком та має 32 стани (для кожного з яких потрібно 5 біт). У табл. 1 наведено кодування переходів скінченного автомату Мілі.

Таблиця переходів стану, яка описує скінченний автомат показує, що для подання хромосом потрібні лише 2 останні колонки, оскільки перша колонка – це відсортований серійний номер скінченного автомату, а значення другої колонки повторюються для кожного стану. Отже, перший стан може бути закодований так: 1001 1101, де перші 4 біти призначені для переходу, якщо значення виходу дорівнює 0, а останні 4 біти для значення виводу 1. Перші 2 біти кожного переходу описують дію, а останні 2 біти - це серійний номер наступного стану. На рис. 3 показаний результат кодованого скінченного автомату.

Таблиця 1

**Таблиця переходів двійкового кодованого стану геному для скінченного автомату**

Old State	Input	New State	Action
00	0	00	01
00	1	01	11
01	0	01	01
01	1	11	11
10	0	10	10
10	1	11	11
11	0	10	10
11	1	10	11



Рис. 3

Було розроблено програмну реалізацію алгоритму побудови скінченних автоматів, керуючих поведінкою штучного мурахи. Результат роботи про-

грами за генетичним алгоритмом такий: починаючи з 90-го покоління мураха почав повністю проходити шлях за 200 кроків.

Вручну порівняно нескладно побудувати скінченний автомат, який описує таку стратегію: «Бачу їжу – йду вперед. Не бачу – повертаю. Зробив коло, але їжі нема – йду вперед». Такий скінченний автомат Мілі має п'ять станів і дозволяє мурахі з'їсти 81 шматочок їжі за 200 ходів, а всі 89 – лише за 314 ходів, тобто обмеження 200 ходів не виконується [2].

У роботі [9] за допомогою генетичних алгоритмів побудовано скінченний автомат Мілі із 13 станів, який дозволяє мурахі з'їсти всю їжу за 200 ходів.

У роботі [2] побудовано скінченний автомат Мілі із 11 станів, який дозволяє з'їсти всю їжу за 193 ходи.

Крім цього, в роботі [11] описується алгоритм перебору, за допомогою якого було встановлено, що скінченні автомати з шістьма і меншою кількістю станів задачу «Штучного мурахи» не розв'язують.

Для стежки Санта-Фе побудовано скінченний автомат із семи станів, який розв'язує задачу за 189 кроків [6].

Отриманий в роботі скінченний автомат повністю розв'язує задачу, тобто штучний мураха за 200 кроків з'їдає всю їжу. Кількість станів скінченного автомата є 32. Можна додатково провести мінімізацію отриманого скінченного автомата за методом Ауфенкампа і Хона.

Задача мінімізації кількості внутрішніх станів скінченного автомата полягає в побудові такого автомата, який є еквівалентний заданому і має найменше число внутрішніх станів. Можливість скорочення числа станів визначається тим, що деякі внутрішні стани автомата, визначені як сумісні, можна об'єднати в один стан, не порушений при цьому закони функціонування автомата.

В даний час задача мінімізації скінченного автомата має ефективно і практично прийнятне розв'язання, коли внутрішні стани і виходи скінчених автоматів визначені для будь-якої вхідної послідовності. Відомі алгоритми мінімізації повних автоматів [12-14] зводяться до перебору системи класів сумісності. Основні результати цього підходу закладені в роботах [12, 13].

**Висновки.** У роботі запропоновано генетичний алгоритм, який здійснює побудову скінчених автоматів Мілі. Ці алгоритми застосовані для задачі про штучну мураха. Алгоритм апробовано на двох спеціально розроблених складних тестових даних, а саме стежці Джона Мюїра та стежці Санта-Фе. Написано власну програму, яка дозволяє проводити числові експерименти. Запропонована в роботі цільова функція дозволила зменшити кількість внутрішніх станів у скінчених автоматів Мілі, які одержують за допомогою генетичного алгоритму. Це також підтверджується експериментальними даними. Насамкінець зазначимо, що задача пошуку штучного мурахи з найменшою кількістю станів не ставилося.

### Бібліографічні посилання

1. Jefferson D., Collins R., Cooper C., Dyer M., Flowers M., Korf R., Taylor C., Wang A. The Genesys System: Evolution as a Theme in Artificial Life. *Proceedings of Second Conference on Artificial Life*. MA: Addison-Wesley. 1992. P. 549 – 578.
2. Angeline P. J., Pollack J. Evolutionary Module Acquisition. *Proceedings of the Second Annual Conference on Evolutionary Programming*. 1993. P. 154-163.
3. Maniezzo V., Colomi A. The ant system applied to the quadratic assignment problem. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 1999, 11(5). P. 769-778.
4. Koza J.R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1992.
5. Koza J.R. Genetic programming as a means for programming computers by natural selection. *Statistics and Computing*. 1994, 4. P. 87–112.
6. Chambers L. Practical handbook of genetic algorithms. Boca Raton, CRC Press, 1999.
7. Bereza A., Lyashov M., Blanco L. Finite state machine synthesis for evolutionary hardware. *East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2013)*. IEEE, 2013. P. 1-4.
8. Fabera V., Janes V., Janesova M. Automata Construct with Genetic Algorithm. *9th EUROMICRO Conference on Digital System Design (DSD'06)*. 2006. P. 460-463.
9. Давыдов А.А., Соколов Д.О., Царев Ф.Н. Применение генетических алгоритмов для построения автоматов Мура и систем взаимодействующих автоматов Мили на примере задачи об «Умном муравье». *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2008, 53. С. 108-114.
10. Kim D. Memory analysis and significance test for agent behaviours. *Proceedings of the 8th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. 2006. С. 151 – 158.
11. Царев Ф.Н., Шалыто А.А. Применение генетических алгоритмов для построения автоматов с минимальным числом состояний для задачи об «Умном муравье». *Тезисы научно-технической конференции «Научно-программное обеспечение в образовании и научных исследованиях»*. СПбГУ ПУ. 2008, С. 209 – 215.
12. Aufenkamp D.D., Hohn F.E. Analysis of Sequential Machines. *IRE Trans. Electr. Comput.* 6. 1957, 6. P. 276-283.
13. Aufenkamp D.D. Analysis of Sequential Machines. *IRE Trans. Electr. Comput.* 7. 1958. 2. P. 299-306.
14. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Издательский дом «Вильямс», 2002.

Надійшла до редколегії 16.09.2022.

**В.М. Турчин<sup>1</sup>, О.Є. Лоскутов<sup>2</sup>, М.В. Сотула<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,

<sup>2</sup>Дніпровська медична академія МОЗ України

## **СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ АНТРОПОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАНАЛУ СТЕГНОВОЇ КІСТКИ**

У роботі проведено статистичний аналіз антропометричних характеристик каналу стегнової кістки.

**Ключові слова:** вибірка, розподіл, лінійна регресія, антропометричні характеристики.

**V.M. Turchyn<sup>1</sup>, O.E. Loskutov<sup>2</sup>, M.V. Sotula<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipro National University,

<sup>2</sup>Dnipropetrovsk Medical Academy of the Ministry of Health of Ukraine

## **STATISTICAL ANALYSIS OF THE ANTHROPOMETRIC CHARACTERISTICS OF THE HIP BONE CHANNEL**

Endoprosthetics often is almost the only solution for a patient with severe hip joint pathology. During installation of a hip implant one of its parts (so-called stem) is inserted in the femoral marrow cavity. Moreover, the installation must be done so that, on the one hand, the stem fits tightly, and, on the other hand, no critical stress appears in the cavity. Otherwise, serious postoperative complications are possible. Adhesion of the implant to the canal walls is ensured by a suitable design (shape) of the implant. To ensure the latter, it is necessary to know the anthropometric characteristics of the femoral canal.

The original data are digitized X-ray images of the femoral canal. The sample size is 133.

The width of the implant and its position in the lateral projection for the  $u$ -th canal is determined by  $d_u$  - the minimum distance from the front wall of the channel to the supporting segment of the back wall of the channel. Ideally, the width of the implant for the  $u$ -th canal in the lateral projection should be equal to  $d_u$ .

The position of the implant in the  $u$ -th canal in the direct projection is determined by the width of the canal  $a_{u,13}^{(c)}$  in the 13th node in the direct projection, the width of the canal  $a_{u,1}^{(c)}$  in the first node in the direct projection, the width of the canal  $b_{u,13}^{(c)}$  in the 13th node in the lateral projection and the taper angle of the canal  $\gamma_u$  in the direct projection.

The distributions of the following anthropometric characteristics were studied:

$a_{13}^{(c)}$  - the canal width at the 13th node in direct projection;

$a_1^{(c)}$  - the canal width at the 1st node in direct projection;

$b_{13}^{(c)}$  - the canal width at the 13th node in the lateral projection;

$d$  - the minimum distance from the front wall of the canal to the support segment of the back wall of the canal;

$\gamma$  - canal taper angle.

Pairwise dependence and pairwise independence of the anthropometric characteristics were studied. Anthropometric characteristics  $a_{13}^{(c)}$  and  $\gamma$ ;  $d$  and  $\gamma$ ;  $\gamma$  and  $b_{13}^{(c)}$  can be considered independent. When pairwise independence holds the regression dependence between anthropometric characteristics was found. The obtained results can be regarded as a foundation for the choice of the optimal implant form and the optimal set of implants.

Keywords: sample, distribution, linear regression, anthropometric characteristics.

В.Н. Турчин<sup>1</sup>, А.Е. Лоскутов<sup>2</sup>, М.В. Сотула<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,

<sup>2</sup>Дніпровська медичинська академія МОЗ України

## СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АНТРОПОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАНАЛА БЕДРЕННОЙ КОСТИ

В работе проведено статистический анализ антропометрических характеристик канала бедренной кости.

Ключевые слова: выборка, распределение, линейная регрессия, антропометрические характеристики.

**Вступ.** Для хворого з патологією кульшового суглоба чи не єдиним виходом є ендопротезування. Під час ендопротезування імплантат (див. рис. 1 і рис. 2 з [2]) однією його частиною – ніжкою, садять у кістково мозковий канал стегнової кістки (див. рис. 3 і рис. 4 з [2]). Належне прилягання імплантату до стінок каналу забезпечується підходящою конструкцією (формою) імплантату. Щоб забезпечити останнє необхідно знати антропометричні характеристики каналу стегнової кістки.

**Постановка задачі.** Провести статистичний аналіз антропометричних характеристик каналу стегнової кістки.

Вихідними даними є оцифровані рентгенівські знімки каналу стегнової кістки. З кроком 11.5 мм у 13-ти вузлах знімалися заміри  $a_j, j = 1, 2, \dots, 13$  ширини каналу у прямій проекції (див. рис. 1) та у бічній  $b_j, j = 1, 2, \dots, 13$ , у бічній додатково вимірюється кут викривлення каналу  $\alpha$  та відстань  $l_\alpha$  від початку каналу до вершини кута викривлення (див. рис. 2). Обсяг вибірки дорівнює 133.

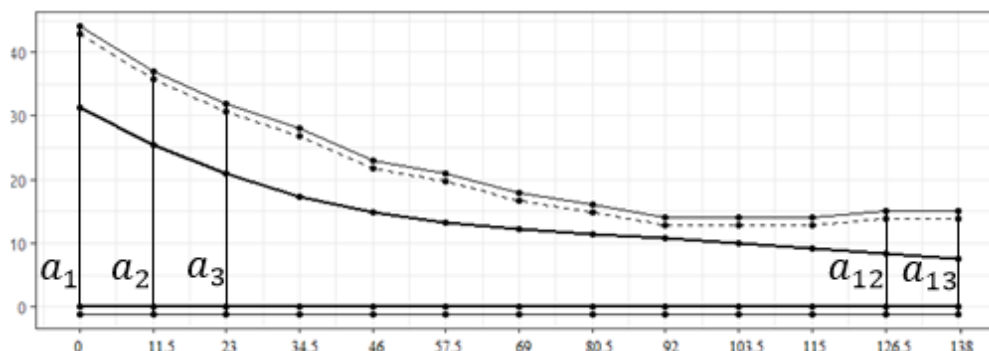


Рис. 1. Пряма проекція каналу зі встановленим імплантатом



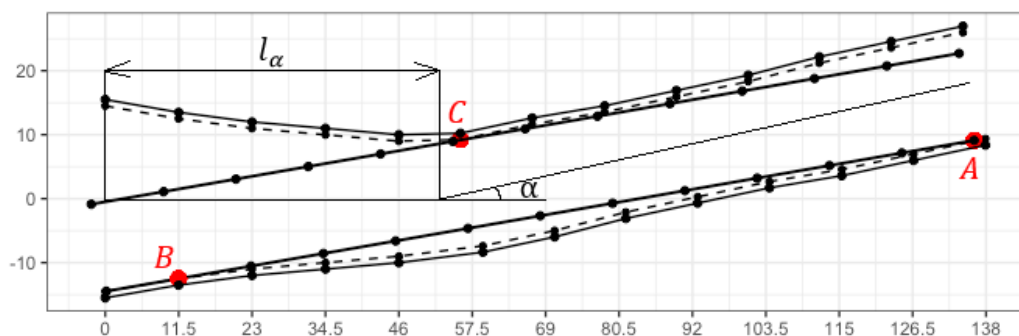


Рис. 2. Бічна проекція каналу та імплантату

Ширина імплантату і його положення у бічній проекції (див. рис. 2) для  $u$ -го каналу визначається величиною  $d_u$  – мінімальною відстанню від передньої стінки каналу до опорного відрізка  $BA$  задньої стінки каналу (на рис. 2  $d_u$  – це відстань від точки  $C$  до відрізка  $BA$ ). В ідеалі ширина імплантату для  $u$ -го каналу у бічній проекції має дорівнювати  $d_u$  (при цьому імплантат займає фіксоване положення у бічній проекції, див. рис. 2).

Положення імплантату в  $u$ -му каналі у прямій проекції визначається шириною каналу  $a_{u,13}^{(c)}$  і  $a_{u,1}^{(c)}$  у прямій проекції, шириною  $b_{u,13}^{(c)}$  каналу  $u$  у бічній проекції і кутом звуження  $\gamma_u$   $u$ -го каналу (див. рис. 3).

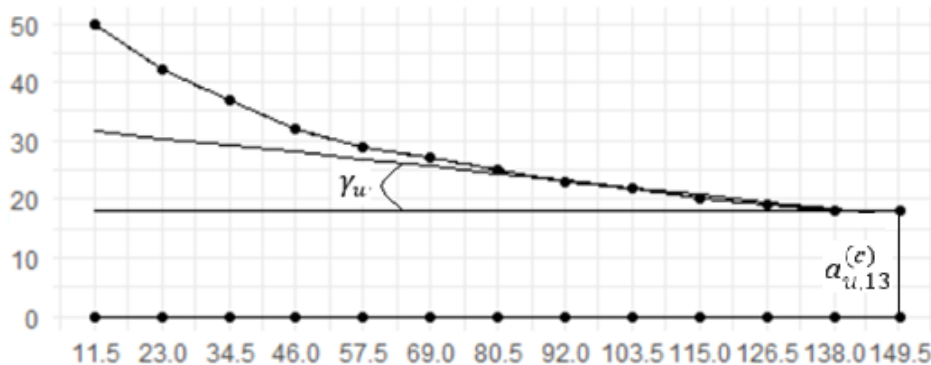


Рис. 3. Кут звуження  $\gamma_u$   $u$ -го каналу

У прямій проекції кращим імплантатом для каналу  $u$  буде той, для якого величина

$$L^{u,v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_{u_j}^{(c)} - a_{v_j}^{(c)})$$

буде меншою (а в ідеалі мінімально можлива), де  $u$  – номер каналу,  $v$  – номер імплантата;  $a_{u_j}^{(c)}$  – ширина  $u$ -го каналу у  $j$ -му вузлі,  $a_{v_j}^{(c)}$  – ширина  $v$ -го імплантата у  $j$ -му вузлі (див. також [2]).

Тому маючи на меті вибір оптимальної форми імплантату необхідно дослідити розподіли таких антропометричних характеристик:

- $a_{13}^{(c)}$  – ширина каналу у 13-му вузлі у прямій проекції,
- $a_1^{(c)}$  – ширина каналу у 1-му вузлі у прямій проекції,
- $b_{13}^{(c)}$  – ширина імплантату у 13-му вузлі у бічній проекції,

$d$  – мінімальна відстань від передньої стінки каналу до опорного відрізка задньої стінки каналу,

$\gamma$  - кут звуження каналу.

**Розподіли антропометричних характеристик каналу.** Далі наведено гістограми розподілів антропометричних характеристик каналу.

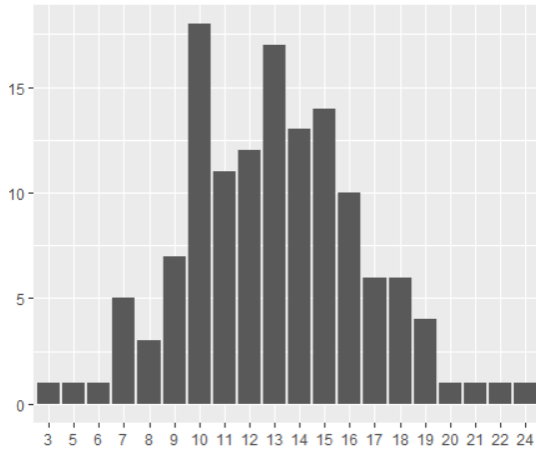


Рис. 4. Гістограма розподілу  $d$

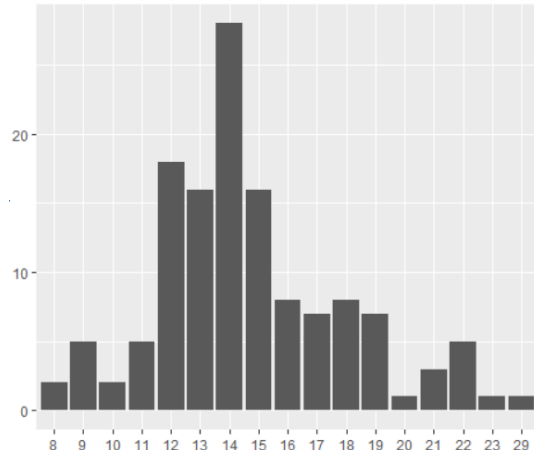


Рис. 5. Гістограма розподілу  $a_{13}^{(c)}$

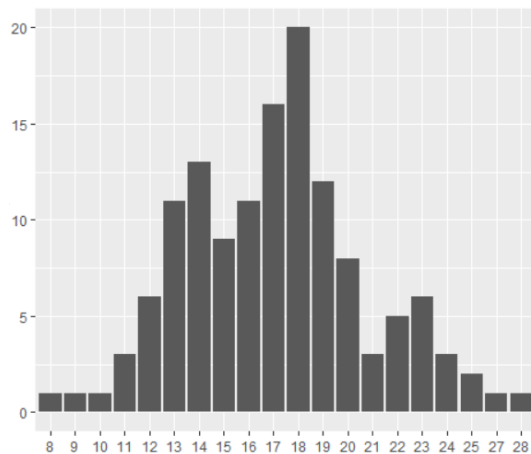


Рис. 6. Гістограма розподілу  $b_{13}^{(c)}$

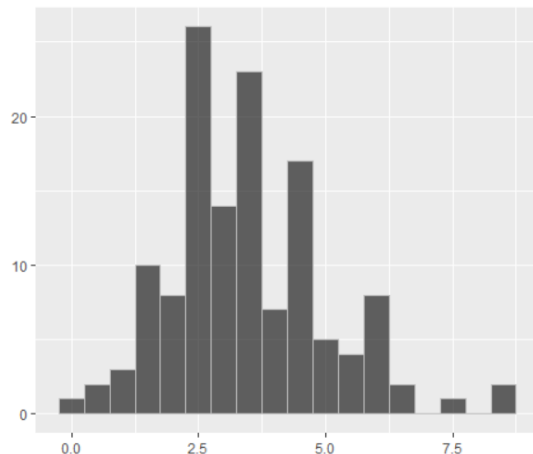


Рис. 7. Гістограма розподілу  $\gamma$

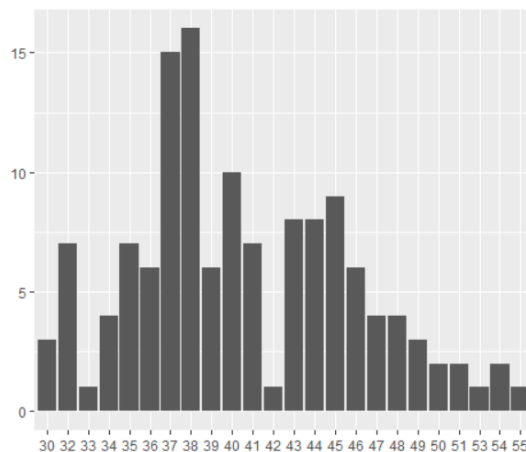


Рис. 8. Гістограма розподілу  $a_1^{(c)}$

Щодо розподілів антропометричних характеристик  $a_{13}^{(c)}$ ,  $a_1^{(c)}$ ,  $b_{13}^{(c)}$ ,  $d$ ,  $\gamma$  були перевірені гіпотези про нормальний розподіл цих характеристик. Гіпотези згідно з критерієм  $\chi^2$  не відхиляється (на 5% рівні значущості). Отже можна вважати, що антропометричні характеристики розподілені нормально.

Далі для характеристик  $a_{13}^{(c)}$ ,  $a_1^{(c)}$ ,  $b_{13}^{(c)}$ ,  $d$ ,  $\gamma$  наведено оцінки середнього  $a$ , дисперсії  $\sigma^2$  та довірчі інтервали для  $a$  і  $\sigma^2$  з коефіцієнтом надійності 0.95.

Характеристика	Оцінки параметрів ( $a$ ; $\sigma^2$ )	Довірчі інтервали для середнього $a$	Довірчі інтервали для дисперсії $\sigma^2$
$a_{13}^{(c)}$	(14.74; 11.36)	(14.16; 15.32)	(9.11; 14.79)
$a_1^{(c)}$	(40.54; 29.72)	(39.60; 41.48)	(23.86; 38.72)
$b_{13}^{(c)}$	(17.11; 13.65)	(16.47; 17.75)	(10.95; 17.78)
$d$	(13.02; 12.08)	(12.42; 13.62)	(9.70; 15.74)
$\gamma$	(3.42; 2.31)	(3.16; 3.68)	(1.86; 3.01)

**Незалежність антропометричних характеристик.** Відносно антропометричних характеристик перевірені гіпотези про їх попарну незалежність (за допомогою критерію  $\chi^2$  на 5% рівні значущості). В таблиці наведено значення статистики критерію  $\chi^2$  для перевірки незалежності параметрів при критичному значенні  $\chi_{0.05;1}^2 = 3.84$ .

	$a_{13}^{(c)}$	$a_1^{(c)}$	$b_{13}^{(c)}$	$d$	$\gamma$
		<b>4.71</b>	<b>31.09</b>	<b>14.48</b>	0.45
	<b>4.71</b>		<b>8.69</b>	<b>15.75</b>	<b>17.88</b>
	<b>31.09</b>	<b>8.69</b>		<b>74.61</b>	1.47
	<b>14.48</b>	<b>15.75</b>	<b>74.61</b>		0.47
	0.45	<b>17.88</b>	1.47	0.47	

Гіпотези про незалежність відхиляються для пар параметрів:  $a_{13}^{(c)}$  і  $b_{13}^{(c)}$ ;  $a_{13}^{(c)}$  і  $a_1^{(c)}$ ;  $a_1^{(c)}$  і  $b_{13}^{(c)}$ ;  $d$  і  $a_{13}^{(c)}$ ;  $d$  і  $a_1^{(c)}$ ;  $a_1^{(c)}$  і  $\gamma$ ;  $d$  і  $b_{13}^{(c)}$ .

Гіпотези про залежність не відхиляються для пар параметрів:  $a_{13}^{(c)}$  і  $\gamma$ ;  $d$  і  $\gamma$ ;  $\gamma$  і  $b_{13}^{(c)}$ . Так що антропометричні характеристики  $a_{13}^{(c)}$  і  $\gamma$ ;  $d$  і  $\gamma$ ;  $\gamma$  і  $b_{13}^{(c)}$  можна вважати незалежними.

**Регресійні залежності антропометричних характеристик.** Далі для пар  $(a_{13}^{(c)}, b_{13}^{(c)})$ ;  $(d, a_{13}^{(c)})$ ;  $(d, b_{13}^{(c)})$  отримано емпіричні регресійні залежності.

Рівняння простої лінійної регресії  $a_{13}^{(c)}$  на  $d$ :

$$y = 14.74 + 0.66(x - 12.96).$$

Рівняння простої лінійної регресії  $d$  на  $a_{13}^{(c)}$ :

$$y = 12.96 + 0.72(x - 14.74).$$

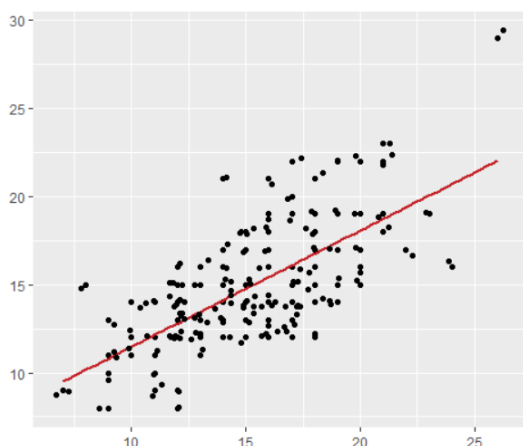


Рис. 9. Графік простої лінійної регресії  $a_{13}^{(c)}$  на  $d$



Рис. 10. Графік простої лінійної регресії  $d$  на  $a_{13}^{(c)}$

Рівняння простої лінійної регресії  $b_{13}^{(c)}$  на  $d$ :

$$y = 17.11 + 0.94(x - 12.96).$$

Рівняння простої лінійної регресії  $d$  на  $b_{13}^{(c)}$ :

$$y = 12.96 + 0.85(x - 17.11).$$

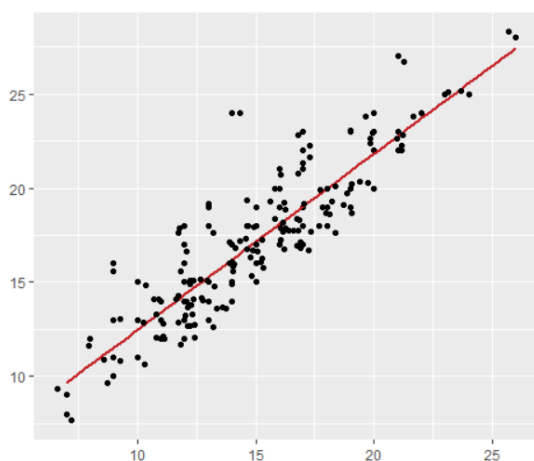


Рис. 11. Графік простої лінійної регресії  $b_{13}^{(c)}$  на  $d$

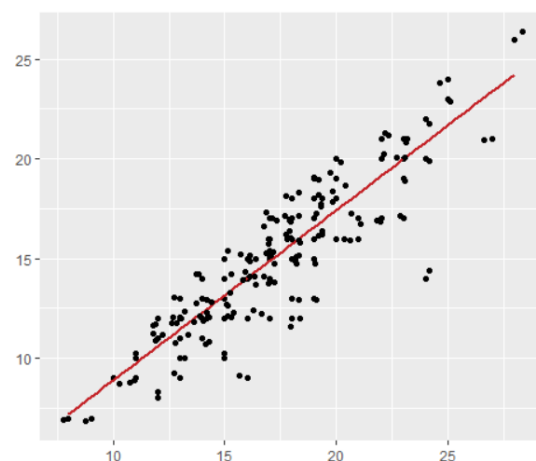


Рис. 12. Графік простої лінійної регресії  $d$  на  $b_{13}^{(c)}$

Рівняння простої лінійної регресії  $a_{13}^{(c)}$  на  $b_{13}^{(c)}$ :

$$y = 14.74 + 0.69(x - 17.11).$$

Рівняння простої лінійної регресії  $b_{13}^{(c)}$  на  $a_{13}^{(c)}$ :

$$y = 17.11 + 0.83(x - 14.74).$$

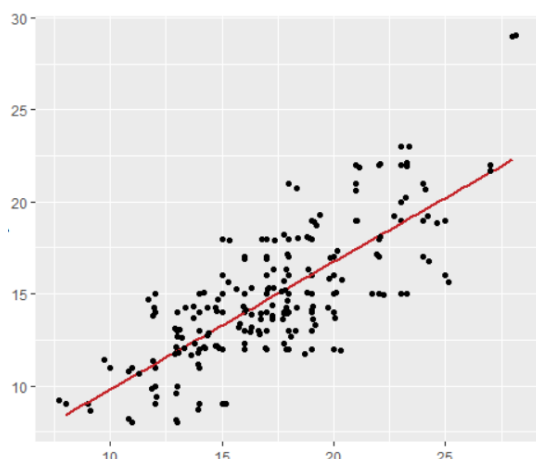


Рис. 13. Графік простої лінійної регресії  $a_{13}^{(c)}$  на  $b_{13}^{(c)}$

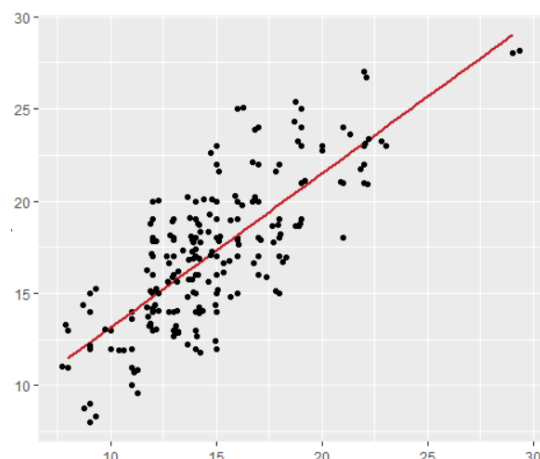


Рис. 14. Графік простої лінійної регресії  $b_{13}^{(c)}$  на  $a_{13}^{(c)}$

**Висновки.** Отримано розподіли антропометричних характеристик каналу стегнової кістки. Досліджена попарна незалежність та попарна залежність антропометричних характеристик. Коли попарна залежність має місце встановлено регресійний зв'язок між антропометричними характеристиками. Отримані результати є основою для вибору оптимальної форми імплантату.

#### Бібліографічні посилання

1. Эндопротезирование тазобедренного сустава / под ред. проф. А.Е. Лоскутова. – Д., 2010. – 344 с.
2. Турчин В.М., Лоскутов О.С., Савинська О.Ю. Щодо оптимального вибору імплантату кульшового суглоба. *Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.* – 2020. – С. 163-174.
3. Турчин В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Д., 2018. – 752 с.

*Надійшла до редколегії 06.09.2022.*

**В.М. Турчин<sup>1</sup>, О.Є. Лоскутов<sup>2</sup>, М.В. Сотула<sup>1</sup>**  
<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,  
<sup>2</sup>Дніпровська медична академія МОЗ України

## ЩОДО РОЗПОДІЛУ ДЕЯКИХ ФУНКЦІОНАЛІВ НА КЛАСАХ ІМПЛАНТАТІВ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА

У роботі знайдено розподіли відхилення антропометричних характеристик каналу стегнової кістки від параметрів імплантату.

Ключові слова: розподіл, щільність розподілу, антропометричні характеристики, імплантат.

**V.M. Turchyn<sup>1</sup>, O.E. Loskutov<sup>2</sup>, M.V. Sotula<sup>1</sup>**  
<sup>1</sup>Oles Honchar Dnipro National University,  
<sup>2</sup>Dnipropetrovsk Medical Academy of the Ministry of Health of Ukraine

## DISTRIBUTION OF SOME FUNCTIONALS ON CLASSES OF HIP JOINT IMPLANTS

The problem of selecting from a given set of implants the hip implant which ensures proper fit to the walls of the femoral marrow cavity was considered in [2]. The distribution of the deviation of the anthropometric characteristics of the implant channel of the femur is studied in this paper.

Let  $d$  be the minimal distance from the front wall of the channel to the support segment of the back wall (see [2]). The distribution of  $d$  is known — it is the truncated normal distribution on  $[d_1; \infty)$ , denote its power density function by  $f(x)$ .

Suppose that we have a set of implants, the possible width of which in the lateral projection takes values  ${}_s d^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ .

A random variable

$$\eta = \sum_{s=1}^m (d - {}_s d^{(i)}) I_{[{}_s d^{(i)}, {}_{s+1} d^{(i)}]}(d)$$

(by definition  ${}_{m+1} d^{(i)} = \infty$ ) constitutes the deviation of the widths  ${}_1 d^{(i)}$ ,  ${}_2 d^{(i)}$ , ...,  ${}_m d^{(i)}$  from  $d$  (in the lateral projection) for the given set of implants. The power density function  $f_\eta(x)$  of the random variable  $\eta$  was found in this article, namely,

$$f_\eta(x) = \sum_{s=1}^m f({}_s d^{(i)} + x) I_{(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}]}(x),$$

where  $f(x)$  is the density function of  $d$ .

If  $\max_{1 \leq s \leq m+1} ({}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}) \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$ , then the distribution of the random variable  $\eta$  converges to the atomic distribution concentrated at zero. This fact means that by taking  $m$  large enough the fit of the implant in the lateral projection can be made quite good.

The specific values of the  ${}_1d^{(i)}, {}_2d^{(i)}, \dots, {}_{m+1}d^{(i)}$  parameters can be found using the empirical distribution of the random variable  $\eta$ .

Let  $\gamma$  be the taper angle of the hip bone channel and let  $g(t)$  be the power density function of the  $\gamma$  distribution. We may regard  $g(t)$  as a known function. Let  ${}_s\gamma^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , be the values of the implant taper angle in the direct projection,  ${}_1\gamma^{(i)} < {}_2\gamma^{(i)} < \dots < {}_m\gamma^{(i)}$ ,  ${}_0\gamma^{(i)} = -\infty$ ,  ${}_{m+1}\gamma^{(i)} = +\infty$ . The density of the deviation of the taper angles  ${}_s\gamma^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , for the given set of implants from the taper angle  $\gamma$ ,

$$\gamma = \left(\gamma - {}_1\gamma^{(i)}\right) I_{\left({}_0\gamma^{(i)}; {}_1\gamma^{(i)}\right)}(\gamma) + \sum_{s=1}^m \left(\gamma - {}_s\gamma^{(i)}\right) I_{\left[{}_s\gamma^{(i)}; {}_{s+1}\gamma^{(i)}\right]}(\gamma)$$

has a similar appearance.

As  $m \rightarrow \infty$  the distribution of the deviation converges to the atomic distribution concentrated in zero. Therefore good fit of the implant to the walls of the channel can be ensured also in the direct projection by taking the value of the  $m$  parameter large enough.

**Keywords:** distribution, density functions, anthropometric characteristics, implant.

**В.Н. Турчин<sup>1</sup>, А.Е. Лоскутов<sup>2</sup>, М.В. Сотула<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,

<sup>2</sup>Дніпровська медичинська академія МОЗ України

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КЛАССАХ ИМПЛАНТАТОВ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА

В работе получены распределения отклонения антропометрических характеристик канала бедренной кости от параметров имплантата.

**Ключевые слова:** распределение, плотность распределения, антропометрические характеристики, имплантат.

**Вступ.** Задача вибору імплантату кульшового суглоба із заданого набору імплантатів, який забезпечує належне прилягання до стінок каналу стегнової кістки розглядався у роботі [2]. У даній роботі досліджується розподіл відхилення антропометричних характеристик каналу від характеристик даного набору імплантатів.

**Постановка задачі.** Дослідити розподіли відхилення антропометричних характеристик каналу стегнової кістки від параметрів набору імплантатів, маючи на меті отримати оптимальні (або принаймні близькі до оптимальних) значення параметрів набору імплантатів.

**Методи розв'язання та аналіз результатів.** Нехай  $d$  – мінімальна відстань від передньої стінки каналу до опорного відрізка задньої стінки (див. рис. 1, а також рис. 7 із [2]).

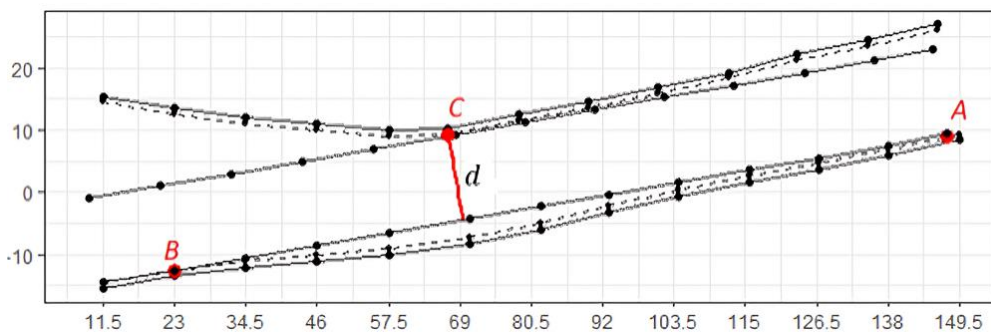


Рис. 1. Бічна проекція каналу та імплантату

Можна вважати, що  $d$  розподілена  $N_{\alpha; \beta^2}$ , тут  $N_{13; (3.5)^2}$  (щільність  $N_{13; (3.5)^2}$  позначимо  $n(t)$ ).

Оскільки у бічній проекції мінімальна ширина імплантату дорівнює 8 мм, то розглядатимемо канали у яких  $d \geq 8$ . Останнє означає, що в якості розподілу  $d$  розглядатимемо зрізаний нормальний розподіл (зосереджений на проміжку  $[8; \infty)$ ). При цьому щільність  $f(t)$  зрізаного нормального розподілу (зосередженого на  $[8; \infty)$ ) дорівнює  $c \cdot n(t)$ . Константа  $c$  вибирається так, щоб

$$\int_8^{\infty} cn(t) dt = 1.$$

“Маса хвоста  $[-\infty; 8)$ ” розподілу  $N_{13; (3.5)^2}$  дорівнює  $N_{13; (3.5)^2}([-\infty; 8)) = 0.075$ ; “Маса хвоста  $[8; \infty)$ ” розподілу  $N_{13; (3.5)^2}$  дорівнює  $N_{13; (3.5)^2}([8; \infty)) = 0.925$ , тому  $c = 1/0.925 = 1.08$ .

Щільність  $f(t)$  зрізаного нормального розподілу на проміжку  $(-\infty; 8]$  дорівнює 0, а на проміжку  $[8; \infty)$  дорівнює  $c \cdot n(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in (-\infty; 8], \\ cn(t), & \text{при } t \in [8; +\infty). \end{cases}$$

Позначимо через  ${}_s d^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$  ( ${}_1 d^{(i)} \leq {}_2 d^{(i)} \leq \dots \leq {}_m d^{(i)}$ ), значення ширини імплантатів у бічній проекції,  $m$  – кількість розмірів імплантатів у бічній проекції. Зазначимо, що завжди  ${}_1 d^{(i)} = 8$  – мінімальна ширина імплантату у бічній проекції.

Нехай маємо набір імплантатів можливої ширини яких у бічній проекції набуває значень  ${}_s d^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ . Випадкова величина

$$\eta = \sum_{s=1}^m (d - {}_s d^{(i)}) I_{[{}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)}]}(d)$$

( ${}_{m+1} d^{(i)} = +\infty$  за означенням) описує відхилення від  $d$  ширини  ${}_1 d^{(i)}, {}_2 d^{(i)}, \dots, {}_m d^{(i)}$  даного набору імплантатів у бічній проекції. За означенням якщо  $d$  опинилося у  $[{}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)})$ , то значення відхилення  $\eta$  дорівнює  $(d - {}_s d^{(i)})$ .



Знайдемо розподіл відхилення

$$\eta = \sum_{s=1}^m \left( d - {}_s d^{(i)} \right) I_{\left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]}(d).$$

Функцію розподілу  $d$  позначимо через  $F(x)$ . Нагадаємо, що  $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$  – щільність розподілу  $d$ .

Функція розподілу

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = \sum_{s=1}^m P\left\{\eta < x \mid d \in \left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]\right\} P\left\{d \in \left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]\right\}. \quad (1)$$

При  $x \leq 0$  значення  $F_{\eta}(x) = 0$ , а разом з тим і значення кожного доданку у правій частині дорівнює 0 (оскільки  $\eta$  невід'ємна випадкова величина). При  $x > 0$  для кожного доданку ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) у правій частині (1) маємо

$$\begin{aligned} & P\left\{\eta < x \mid d \in \left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]\right\} \cdot P\left\{d \in \left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]\right\} = \\ &= \frac{P\left\{d - {}_s d^{(i)} < x, {}_s d^{(i)} \leq d < {}_{s+1} d^{(i)}\right\}}{P\left\{{}_s d^{(i)} < d < {}_{s+1} d^{(i)}\right\}} \cdot P\left\{d \in \left[ {}_s d^{(i)}; {}_{s+1} d^{(i)} \right]\right\} = \\ &= P\left\{d < {}_s d^{(i)} + x, {}_s d^{(i)} \leq d < {}_{s+1} d^{(i)}\right\} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ P\left\{{}_s d^{(i)} \leq d < {}_{s+1} d^{(i)}\right\}, & \text{при } x > {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}, \\ P\left\{{}_s d^{(i)} \leq d < {}_{s+1} d^{(i)} + x\right\}, & \text{при } 0 < x \leq {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ F\left({}_{s+1} d^{(i)}\right) - F\left({}_s d^{(i)}\right), & \text{при } x > {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}, \\ F\left({}_s d^{(i)} + x\right) - F\left({}_s d^{(i)}\right), & \text{при } 0 < x \leq {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Функція (2) диференційовна за  $x$  і її похідна

$$\begin{aligned} f_s(x) &= \begin{cases} f\left({}_s d^{(i)} + x\right), & \text{при } x \in \left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right], \\ 0, & \text{при } x \notin \left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right] \end{cases} = \\ &= f\left({}_s d^{(i)} + x\right) I_{\left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right]}(x), \quad s = 1, 2, \dots, m \quad (3) \end{aligned}$$

Із означення  $F_\eta(x)$  і дифференційовності функції (2) (майже всюди) випливає, що функція розподілу  $F_\eta(x) = P\{\eta < x\}$  дифференційовна (майже всюди) і

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx} F_\eta(x) = \sum_{s=1}^m f_s(x) = \sum_{s=1}^m f\left({}_s d^{(i)} + x\right) I_{\left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right]}(x), \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

Графік функції  $f_s(x)$  на проміжку  $\left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right]$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , можна отримати з графіка функції  $f(x)$  зсувом його вліво на  ${}_s d^{(i)}$ , на доповнені проміжку  $\left(0; {}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right]$   $f_s(x) = 0$  (див. рис. 2). Графік щільності  $f_\eta(x)$  отримуємо з графіків функції  $f_s(x)$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , як “сума графіків  $f_s(x)$ ”, оскільки

$$f_\eta(x) = \sum_{s=1}^m f_s(x)$$

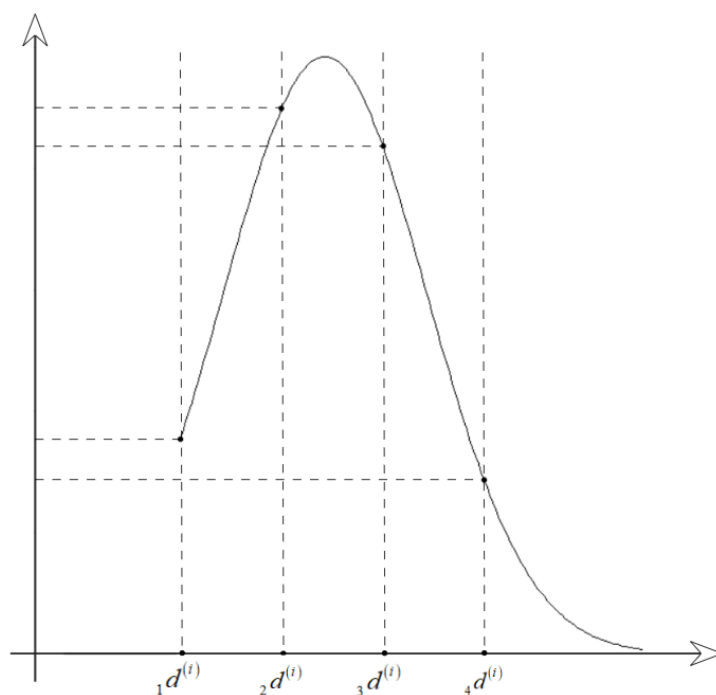
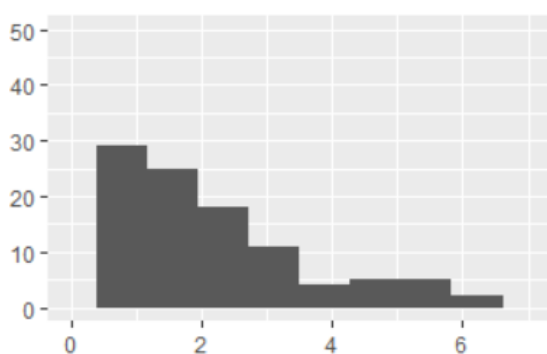


Рис. 2. Щільність  $f(x)$

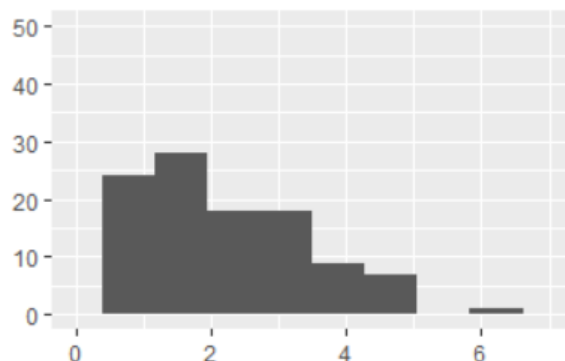
**Зауваження.** Якщо  $\max_{1 \leq s \leq m-1} \left({}_{s+1} d^{(i)} - {}_s d^{(i)}\right) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , то розподіл випадкової величини  $\eta$  збігається до атомічного зосередженого в точці 0 (що цілком погоджується з інтуїтивними уявленнями про розподіл  $\eta$ ).

Останнє означає, що за рахунок вибору  $m$  досить великим можна забезпечити досить добре прилягання імплантату у боковій проекції. Вибрати конкретні значення  ${}_1 d^{(i)}, {}_2 d^{(i)}, \dots, {}_m d^{(i)}$ , можна за емпіричним розподілом  $\eta$ . Зрозуміло, що такий вибір не однозначний.

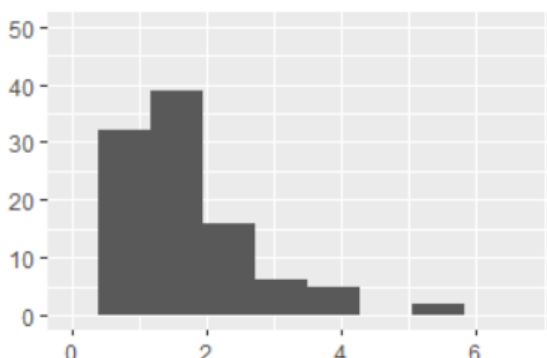
**Приклади емпіричних розподілів  $\eta$ .** Далі наведено гістограми емпіричних розподілів випадкової величини  $\eta$  для деяких наборів  ${}_s d^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ .



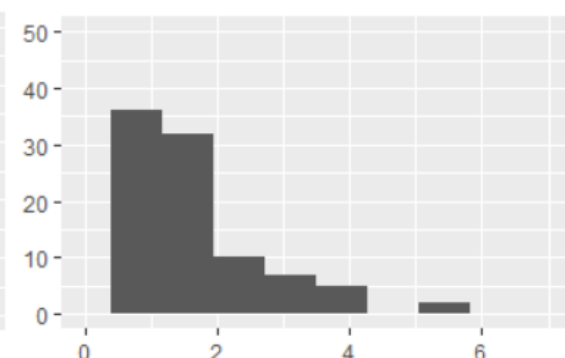
**Рис. 3.** Гістограма розподілу  $\eta$   
 ${}_1 d^{(i)} = 8, {}_2 d^{(i)} = 11, {}_3 d^{(i)} = 13$



**Рис. 4.** Гістограма розподілу  $\eta$   
 ${}_1 d^{(i)} = 8, {}_2 d^{(i)} = 10, {}_3 d^{(i)} = 14$

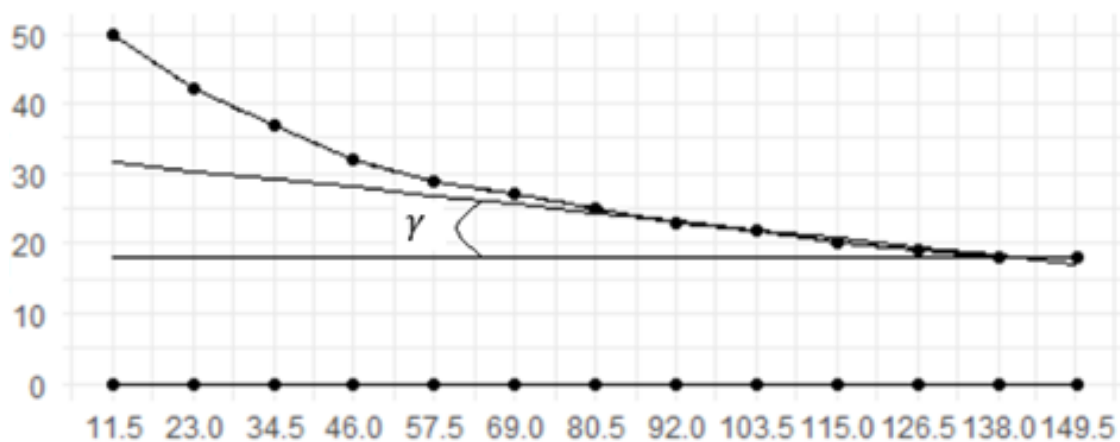


**Рис. 5.** Гістограма розподілу  $\eta$   
 ${}_1 d^{(i)} = 8, {}_2 d^{(i)} = 10, {}_3 d^{(i)} = 12, {}_4 d^{(i)} = 15$



**Рис. 6.** Гістограма розподілу  $\eta$   
 ${}_1 d^{(i)} = 8, {}_2 d^{(i)} = 11, {}_3 d^{(i)} = 13, {}_4 d^{(i)} = 16$

**Щодо вибору кута звуження імплантату.** Позначимо через  $\gamma$  кут звуження каналу стегнової кістки (див. рис. 7).



**Рис. 7.** Кут звуження  $\gamma$  каналу стегнової кістки

Виходячи з вибірки кутів  $\gamma$  (обсяг 133), можна вважати, що  $\gamma$  має розподіл  $N_{\alpha, \sigma^2}$  з параметрами  $\hat{\alpha}_\gamma = 3.42$ ;  $\hat{\sigma}_\gamma^2 = 2.31$ ;  $\hat{\sigma}_\gamma = \sqrt{\hat{\sigma}_\gamma^2} = 1.52$ , щільність цього нормального розподілу позначимо через  $g(t)$ .

Нехай  ${}_s\gamma^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , – значення кута звуження імплантатів у прямій проекції,  ${}_1\gamma^{(i)} < {}_2\gamma^{(i)} < \dots < {}_m\gamma^{(i)}$ ,  ${}_0\gamma^{(i)} = -\infty$ ,  ${}_{m+1}\gamma^{(i)} = +\infty$ . Аналогічно тому, як це було зроблено для  $d$  вводимо відхилення кута звуження  $\gamma$  каналу від кутів звуження  ${}_s\gamma^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ , даного набору імплантатів:

$$\gamma = (\gamma - {}_1\gamma^{(i)}) I_{({}_0\gamma^{(i)}; {}_1\gamma^{(i)})}(\gamma) + \sum_{s=1}^m (\gamma - {}_s\gamma^{(i)}) I_{[{}_s\gamma^{(i)}; {}_{s+1}\gamma^{(i)})}(\gamma).$$

Нехай  $G(x)$  – функція розподілу  $\gamma$ , при цьому  $\frac{d}{dx}G(x) = g(x)$  – щільність розподілу  $\gamma$ . Функція розподілу  $\gamma$

$$F_\gamma(x) = P\{\gamma < x\} = P\{\gamma < x | \gamma \in ({}_0\gamma^{(i)}; {}_1\gamma^{(i)})\} P\{\gamma \in ({}_0\gamma^{(i)}; {}_1\gamma^{(i)})\} + \sum_{s=1}^m P\{\gamma < x | \gamma \in [{}_s\gamma^{(i)}; {}_{s+1}\gamma^{(i)})\} P\{\gamma \in [{}_s\gamma^{(i)}; {}_{s+1}\gamma^{(i)})\}$$

Для  $\zeta$  аналогічно тому як це зроблено для  $d$  за щільністю розподілу  $g(t)$  кута  $\gamma$  знаходимо щільність розподілу  $g_\zeta(x)$  відхилення  $\zeta$ :

$$g_\zeta(x) = g(x + {}_0\gamma^{(i)}) I_{({}_1\gamma^{(i)}; {}_1\gamma^{(i)})}(x) + \sum_{s=1}^m g(x + {}_s\gamma^{(i)}) I_{[{}_0; {}_{s+1}\gamma^{(i)} - {}_s\gamma^{(i)})}(x).$$

**Приклади емпіричних розподілів випадкової величини  $\zeta$ .** Далі наведено гістограми емпіричних розподілів випадкової величини  $\zeta$  для деяких наборів  ${}_s\gamma^{(i)}$ ,  $s = 1, 2, \dots, m$ :

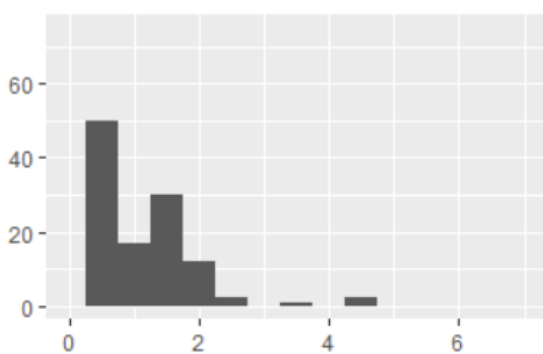


Рис. 8. Гістограма розподілу  $\zeta$   
 ${}_1\gamma^{(i)} = 1, {}_2\gamma^{(i)} = 3, {}_3\gamma^{(i)} = 4$

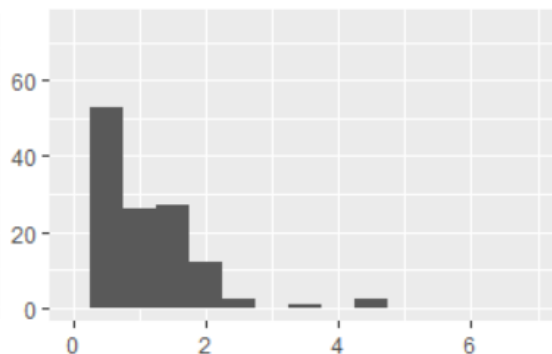
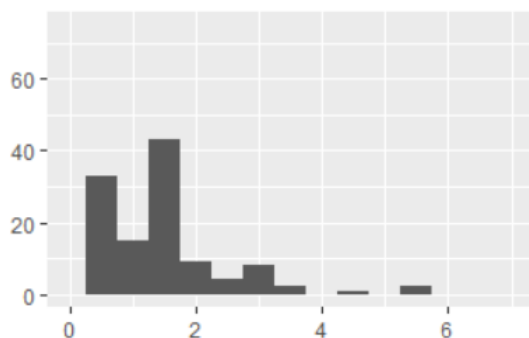
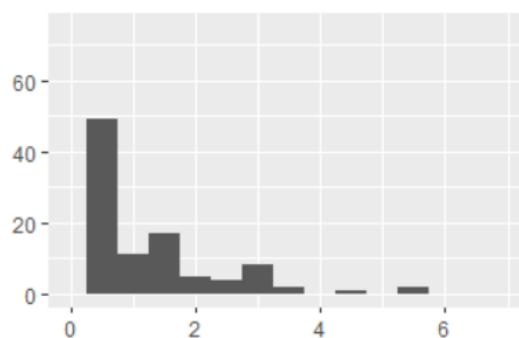


Рис. 9. Гістограма розподілу  $\zeta$   
 ${}_1\gamma^{(i)} = 1, {}_2\gamma^{(i)} = 2, {}_3\gamma^{(i)} = 4$



**Рис. 10.** Гістограма розподілу  $\zeta$   
 ${}_1\gamma^{(i)} = 1, {}_2\gamma^{(i)} = 3$



**Рис. 11.** Гістограма розподілу  $\zeta$   
 ${}_1\gamma^{(i)} = 2, {}_2\gamma^{(i)} = 3$

**Висновки.** Отримано у загальному вигляді щільність розподілу відхилення  $d$  (мінімальної відстані від передньої стінки каналу до опорного відрізка задньої стінки) від ширини даного набору імплантатів у бічній проекції, та щільність розподілу відхилення кута звуження каналу від кутів звуження даного набору імплантатів.

За емпіричними даними запропоновані значення параметрів імплантатів, для яких емпіричний розподіл відхилення концентрується у околі нуля, а отже такі значення параметрів можна вважати близькими до оптимальних.

#### Бібліографічні посилання

1. Эндопротезирование тазобедренного сустава: под ред. проф. А.Е. Лоскутова. Д., 2010. 344 с.
2. Турчин В.М., Лоскутов О.С., Савинська О.Ю. Щодо оптимального вибору імплантату кульшового суглоба. *Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.* – 2020. – С. 163-174.
3. Турчин В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Д., 2018. 752 с.

*Надійшла до редколегії 26.08.2022.*

**В.А. Турчина, Є.О. Коваленко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ ЗАДАЧІ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ З ПЕРЕРИВАННЯМИ НА ОПТИМАЛЬНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ**

Розглядаються задачі паралельного упорядкування вершин повного дводольного орграфа з перериваннями та без них. Проведено аналіз залежності значень цільової функції при певних співвідношеннях між початковими даними. Отримано аналітичний вигляд оцінки виграшу за умови переривань для довільних значень параметрів.

**Ключові слова:** повні дводольні графи, паралельне упорядкування вершин, переривання.

**V.A. Turchyna, Y.O. Kovalenko**

*Oles Honchar Dnipro National University*

## **THE INFLUENCE OF THE PARALLEL SEQUENCING PROBLEM WITH INTERRUPTIONS INITIAL DATA ON THE SOLUTION OPTIMALITY**

In a generalized form, the technological process in production involves the undertaking of a specific amount of jobs with the help of available devices and workers within the set time limits. In addition, certain conditions and restrictions for the jobs usually exist. The parallel sequencing problems are formulated on the basis of finite sets of jobs and performers, a given criterion of optimality, and restrictions on the work execution order. It is convenient to consider them in the form of optimization problems on digraphs, where vertices correspond to jobs, and restrictions are set by arcs.

To formulate the parallel sequencing problem, we presume that there are a finite set of performers and a finite set of jobs, the execution order of which is subject to certain technological restrictions. It is necessary to find such a work distribution between performers, in which, without technological restrictions violation, the execution of all jobs is completed in the minimum time. At the same time, a specific performer cannot perform more than one job at any given time.

Among the issues of these problems solution optimization, the expediency of allowed interruptions in the jobs' execution is considered. In classical formulation, interruptions are not allowed, the jobs' duration is implied as equal and as follows the digraph is unweighted. At the same time in parallel sequencing problems with interruptions jobs' execution times may not be equal. It may contain only equal weight vertices. However, in any case, the digraph in this problem subclass is weighted. It was shown that interruptions can really affect the optimality of the solutions for some graphs classes.

The parallel sequencing problems of the complete bipartite digraph vertices are considered for cases where interruptions are allowed and cases where they are forbidden. The dependence analysis between the objective function values at certain ratios and the initial

data was carried out. An analytical view of the profit estimate with allowed interruptions was obtained for parameters arbitrary values.

**Keywords:** complete bipartite graphs, parallel sequencing of vertices, interruptions.

**В.А. Турчина, Е.А. Коваленко**

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

## ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЗАДАЧИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ С ПРЕРЫВАНИЯМИ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассматриваются задачи параллельного упорядочения вершин полного двудольного орграфа с прерываниями и без них. Проведен анализ зависимости значений целевой функции при определенных соотношениях между исходными данными. Получен аналитический вид оценки выигрыша при условии прерываний для произвольных значений параметров.

**Ключевые слова:** полные двудольные графы, параллельное упорядочение вершин, прерывания.

**Вступ.** В узагальненому вигляді на виробництві технологічний процес передбачає виконання деякої встановленої кількості робіт за допомогою наявних приладів та робітників у встановлених часових термінах. Окрім цього, зазвичай наявні певні умови та особливості виконання робіт. Задачі параллельного упорядкування формулюються на основі скінченних множин робіт та виконавців, заданого критерію оптимальності та обмежень на порядок виконання робіт. Їх зручно розглядати у вигляді оптимізаційних задач на орграфах, де роботам ставляться у відповідність вершини, а обмеження задаються дугами.

Серед питань оптимізації розв'язку виділяють доцільність дозволу переривань при виконанні робіт. Було показано, що переривання дійсно можуть впливати на оптимальність розв'язків для деяких класів графів. Результати дослідження у випадках, коли орграф містить лише ізольовані вершини, наведено в [1]. Результати для паралельно-послідовних графів було наведено в [2]. Для повних дводольних графів було отримано результати при рівній кількості вершин в долях [3].

В даній статті розглядаються задачі для повних дводольних графів  $K_{m,r}$ ,  $m, r \in \mathbb{N}$ , де  $m$  та  $r$  — відповідно кількість вершин у першій та другій долях. Тривалість виконання кожної роботи будь-яким із виконавців є однаковою, тому приймається за 1.

**Постановка задачі.** Нехай задано скінченну множину виконавців  $B$  і скінченну множину робіт  $A$ , на порядок виконання яких накладаються певні технологічні обмеження. Необхідно знайти такий розподіл робіт між виконавцями, при якому без порушення технологічних обмежень виконання усіх робіт завершується за мінімальний час. При цьому в будь-який момент часу конкретний виконавець не може виконувати більше однієї роботи. Для таких прикладних задач зручно подавати множину робіт як множину вершин  $V$  ор-

графа  $G = (V, U)$ , а технологічні обмеження — відповідно як множину дуг  $U$ . Тоді задачу можна сформулювати як задачу побудови паралельного упорядкування вершин орграфу мінімальної довжини при заданій ширині [4].

В класичній постановці цієї задачі переривання при виконанні робіт не передбачаються. В даній роботі досліджується питання впливу переривань на оптимальність розв'язку.

#### Аналіз переривань для часткових випадків.

Означення 1. Перериваннями називатимемо випадки, коли виконання роботи призупиняється в певний момент часу, коли робота ще не виконана в повному обсязі, а пізніше продовжується або до наступного переривання, або до повного завершення.

Для порівняння довжини упорядкувань із перериваннями та без них скористаємося оцінкою виграшу  $W$ , введеною в [стаття 2021]:

$$W = \left(1 - \frac{l_{\Pi}^*}{l^*}\right) \cdot 100\% , \quad (1)$$

де  $l^*$  — довжина оптимального упорядкування без переривань,  $l_{\Pi}^*$  — довжина оптимального упорядкування з перериваннями.

Задано граф  $K_{m,r}$  та ширина упорядкування  $h$ . Розглянемо спочатку випадки, де  $m < r$ . Очевидно, що якщо  $m = qh$ ,  $q \in \mathbb{N}$  то розв'язок тривіальний і довжина оптимального упорядкування  $l = q + \left\lceil \frac{r}{h} \right\rceil$ . Розглянемо який вплив можуть мати переривання на наступних прикладах.

Приклад 1. Задано граф  $K_{4,5}$  та ширина упорядкування  $h = 3$ . Знайти упорядкування мінімальної довжини для випадків дозволених та заборонених переривань.

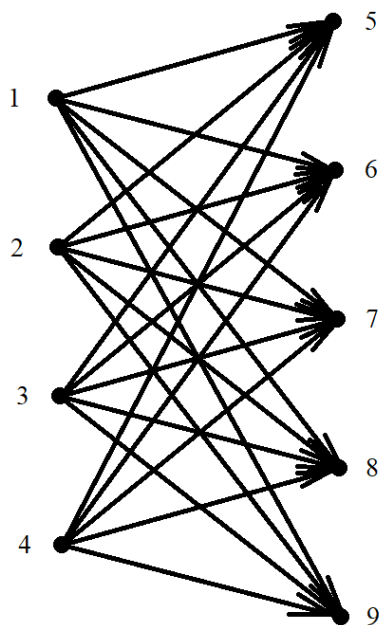


Рис. 1. Граф  $K_{4,5}$



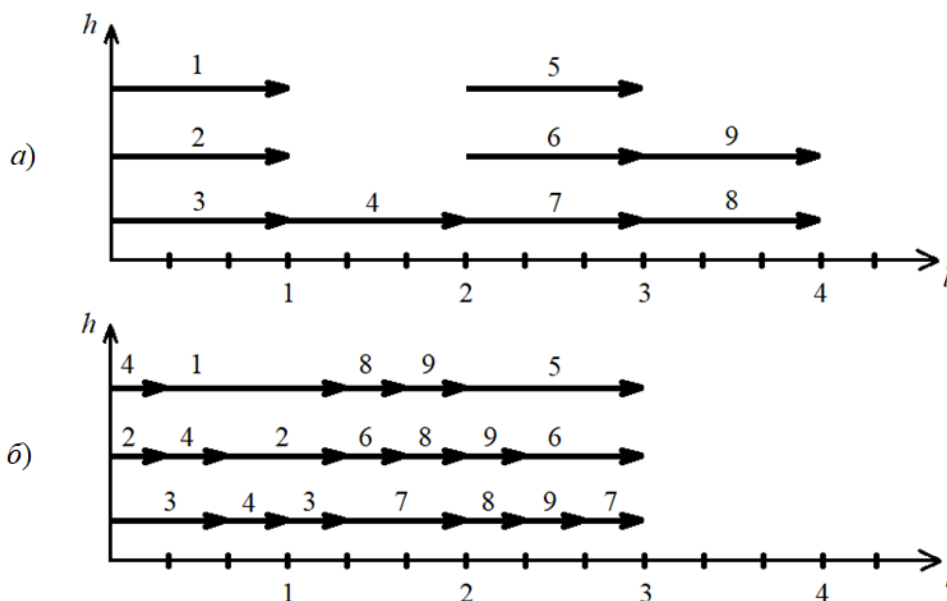


Рис. 2. Схема розподілу вершин графа  $K_{4,5}$  без переривань а) та з перериваннями б) при  $h = 3$

Виграш від використання переривань становить  $W = \left(1 - \frac{9}{12}\right) \cdot 100\% = 25\%$ . Так

само, як і в випадках  $m = r$ , довжина оптимального упорядкування з перериваннями є меншою за довжину без переривань за рахунок того, що вершини під номерами 4, 8 та 9 розподіляються між місцями упорядкування.

Тепер при  $h = 3$ , як і в прикладі 1, розглянемо граф із більшою кількістю вершин у долях — та побудуємо його упорядкування.

Приклад 2. Задано граф  $K_{7,8}$  та ширина упорядкування  $h = 3$ . Знайти упорядкування мінімальної довжини для випадків, коли переривання заборонені та дозволені.

Для спрощення рисунку відмітимо, що із кожної вершини 2 – 7 першої долі йдуть дуги в кожну вершину 8 – 15 другої долі.

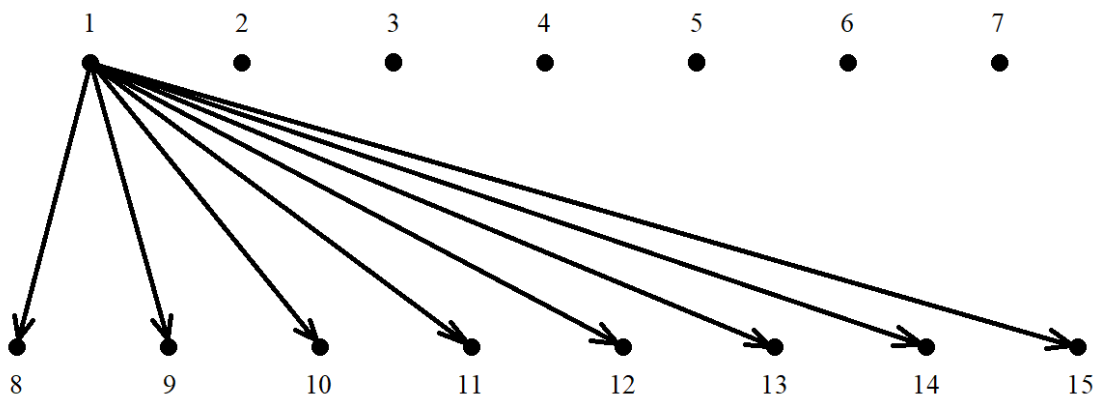


Рис. 3. — Граф  $K_{7,8}$

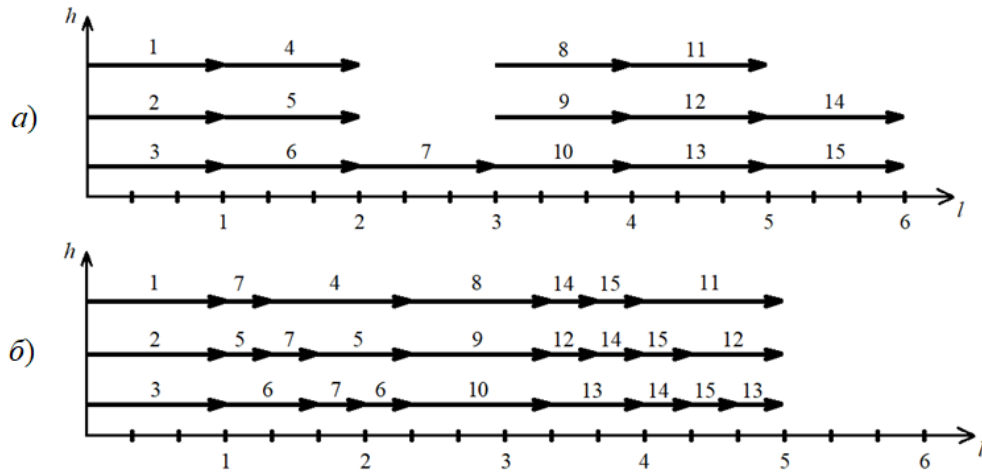


Рис. 4. Схема розподілу вершин графа  $K_{7,8}$  без переривань а) та з перериваннями б) при  $h = 3$

Виграш від використання переривань становить  $W = \left(1 - \frac{15}{18}\right) \cdot 100\% \approx 17\%$ . В

оптимальному упорядкуванні вершин графа  $K_{7,8}$  з перериваннями вершини під номерами 7, 14 та 15 розподіляються між місцями в упорядкуванні, через що довжина є меншою за довжину оптимального упорядкування без переривань. Далі розглянемо упорядкування вершин цього ж графа  $K_{7,8}$  при  $h = 4$ .

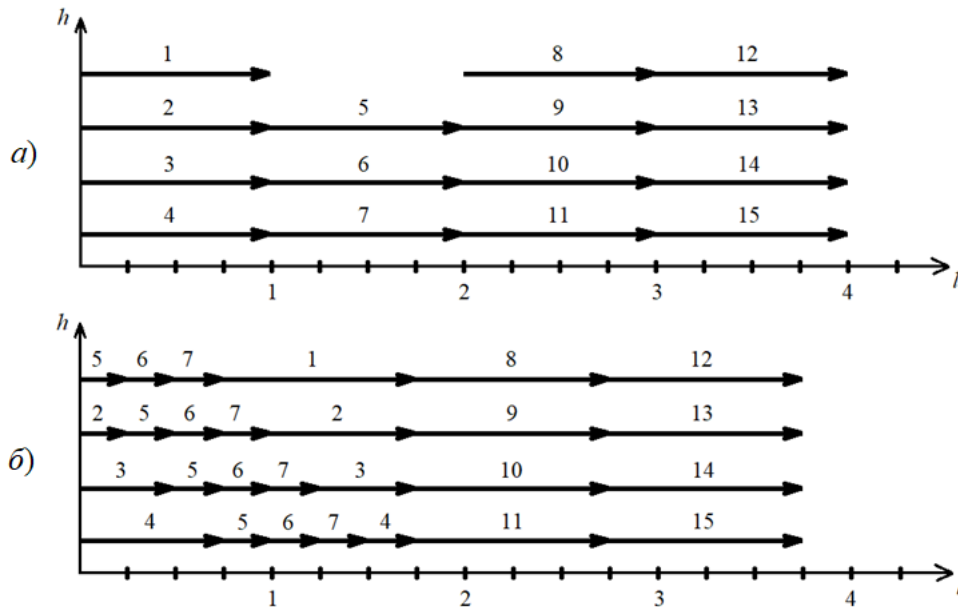


Рис. 5. Схема розподілу вершин графа  $K_{7,8}$  без переривань а) та з перериваннями б) при  $h = 4$

Тут виграш від використання переривань становить  $W = \left(1 - \frac{17}{18}\right) \cdot 100\% \approx 6\%$ ,

тобто він зменшився порівняно з випадком коли  $h = 3$ . В цьому прикладі так само перериваються і розподіляються між місцями упорядкування робіт, що відповідають трьом вершинам графа, але всі вони тепер належать першій долі. Переривати роботи, що відносяться до другої долі графа, тут виявилось недоцільним.

Щоб перевірити, чи завжди при збільшенні ширини упорядкування виграш від переривань зменшується, розглянемо ще випадок  $h = 5$  для того ж орієнтованого графа  $K_{7,8}$ .

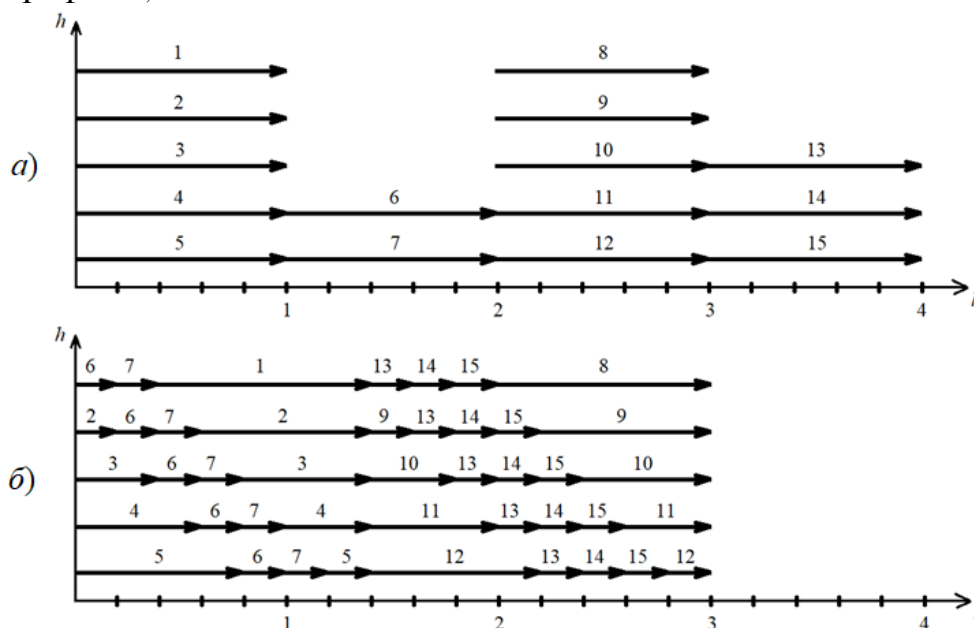


Рис. 6. Схема розподілу вершин графа  $K_{7,8}$  без переривань а) та з перериваннями б) при  $h = 5$

Як видно з упорядкувань при  $h = 5$  виграш становить  $W = \left(1 - \frac{15}{20}\right) \cdot 100\% = 25\%$ , тобто він значно зріс порівняно з випадком  $h = 4$ . Із наведеного вище впливає, що при збільшенні ширини  $h$  виграш від переривань може як збільшуватися, так і зменшуватися.

Тепер розберемо випадки, коли  $m > r$ . Почнемо з розгляду графа  $K_{5,4}$ .

Приклад 3. Задано граф  $K_{5,4}$  та ширина упорядкування  $h = 3$ . Знайти упорядкування з перериваннями та без них мінімальної довжини.

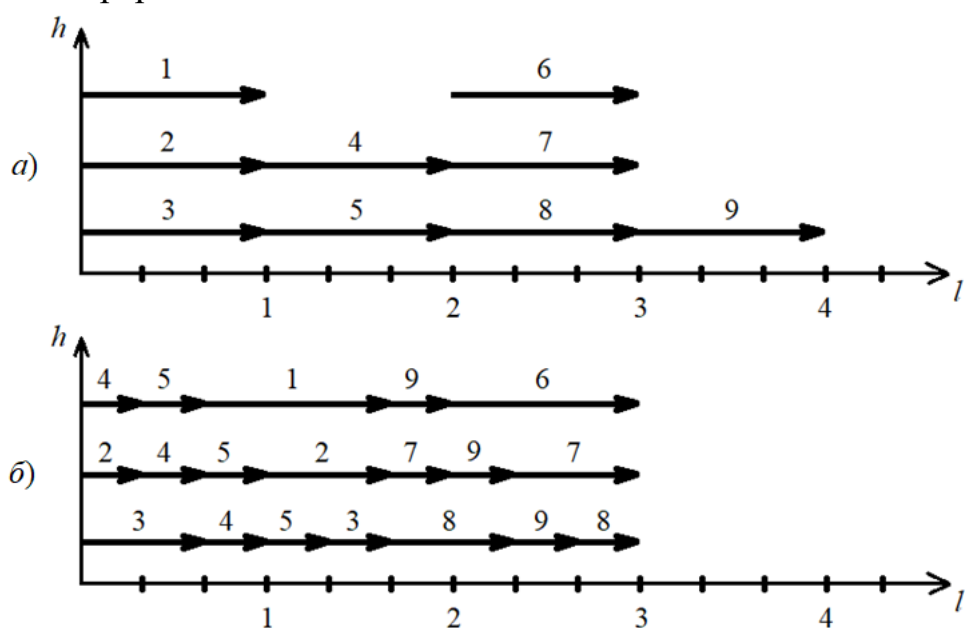


Рис. 7. Схема розподілу вершин графа  $K_{5,4}$  без переривань а) та з перериваннями б) при  $h = 3$

Якщо порівняти упорядкування графів  $K_{4,5}$  та  $K_{5,4}$ , то стає видно, що довжина оптимальних упорядкувань як з перериваннями, так і без переривань є однаковими. Внаслідок чого і вигаш від використання переривань так само дорівнює  $W = \left(1 - \frac{9}{12}\right) \cdot 100\% = 25\%$ .

Далі розглянемо граф  $K_{8,7}$  і порівняємо довжини його оптимального упорядкування та графа  $K_{7,8}$ .

Приклад 4. Задано граф  $K_{8,7}$  та ширина упорядкування  $h = 3$ . Знайти упорядкування для випадків дозволених та заборонених переривань мінімальної довжини.

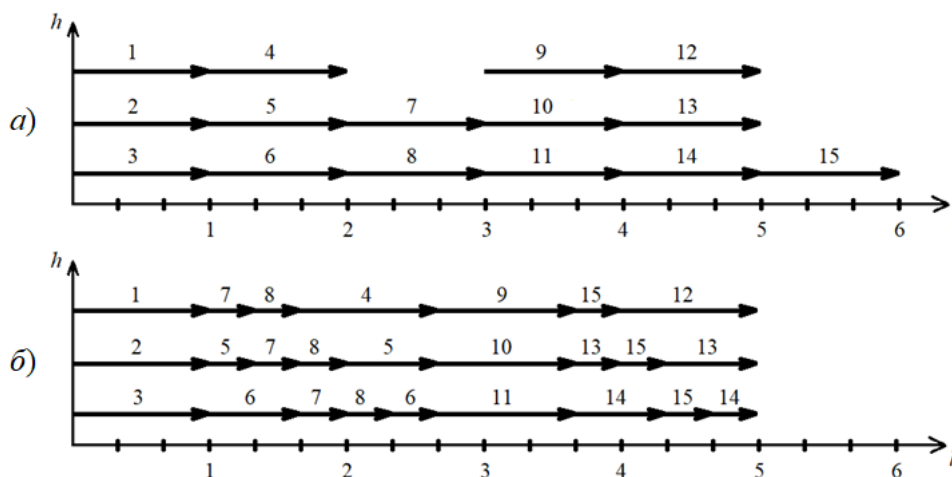


Рис. 8. Схема розподілу вершин графа  $K_{8,7}$  без переривань *a)* та з перериваннями *б)* при  $h = 3$

Так само, як і для графів  $K_{4,5}$  і  $K_{5,4}$ , для графів  $K_{7,8}$  та  $K_{8,7}$  довжини оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями є рівними. Вигаш від використання переривань становить  $W = \left(1 - \frac{15}{18}\right) \cdot 100\% \approx 17\%$ .

Легко бачити, що в усіх наведених прикладах зменшення довжини упорядкування відбувається за рахунок переривання при розподілі вершин саме цієї долі. Враховуючи, що розглядаються повні дводольні графи, упорядкування вершин кожної долі можна розглядати окремо.

**Умова впливу переривань для загального випадку.** На основі наведених міркувань сформулюємо наступне твердження.

Твердження 1. Для довільних  $m, r: m > 1, r > 1, m, r \in N$  довжини оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями орграфів  $K_{m,r}$  та  $K_{r,m}$  є однаковими  $\forall h > 1, h \in N$ .

Доведення.

Очевидно, що твердження є вірним для випадку, коли  $m = r$  оскільки ми маємо граф  $K_{m,m}$ .

Тепер доведемо справедливості твердження при  $m \neq r$ . Як було зазначено, упорядкування вершин кожної долі графа можна розглядати окремо. Тоді позначимо довжину оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями вершин першої відповідно  $l_m^*$  та  $l_{IIm}^*$ , а другої — відповідно  $l_r^*$

та  $l_{Pr}^*$ . Також уведемо позначення довжини оптимального упорядкування всіх вершин графа  $K_{m,r}$  без переривань:

$$l_{m,r}^* = l_m^* + l_r^* \quad (2)$$

та з перериваннями:

$$l_{Pm,r}^* = l_{Pm}^* + l_{Pr}^* . \quad (3)$$

Аналогічно для графа  $K_{r,m}$ :

$$l_{r,m}^* = l_r^* + l_m^* ; \quad (4)$$

$$l_{Pr,m}^* = l_{Pr}^* + l_{Pm}^* . \quad (5)$$

Оскільки у загальному випадку  $l_{m,r}^*, l_{r,m}^* \in N$ ,  $l_{Pm,r}^*, l_{Pr,m}^* \in Q$  то операція додавання є комутативною, тобто:

$$l_m^* + l_r^* = l_r^* + l_m^* ; \quad (6)$$

$$l_m^* + l_r^* = l_r^* + l_m^* . \quad (7)$$

Підставивши (2)-(5) у (6) та (7), отримуємо, що  $l_{m,r}^* = l_{r,m}^*$  та  $l_{Pm,r}^* = l_{Pr,m}^*$ . Твердження доведено.

У виразі (1) бачимо, що виграш від використання переривань передусім залежить від відношення довжин оптимальних упорядкувань заданого графа, тобто від значення дробу

$$\frac{l_{Pr}^*}{l_m^*} . \quad (8)$$

Розглянемо розподіл  $m$  вершин при ширині  $h$ . Проаналізуємо можливі випадки.

I. При значеннях  $m$  кратних  $h$  очевидно виграш буде нульовим, адже в такому випадку всі  $m = kh$  вершин ( $k \in N$ ) розміщуються на  $k$  позиціях і переривання є недоцільними.

II. Якщо  $m < h$ , то в упорядкуванні без переривань вершини будуть займати першу позицію, тобто  $l_m^* = 1$ .

III. Розглянемо випадки, коли  $h < m < 2h$ . Нехай  $c$  — остача від ділення  $m$  на  $h$ ,  $0 < c < h, c \in N$ . Тоді, враховуючи відсутність зв'язків між вершинами однієї доли,  $l_m^* = \left\lceil \frac{m}{h} \right\rceil$ , або

$$l_m^* = \left\lceil \frac{h+c}{h} \right\rceil . \quad (9)$$

Тут округлення вгору необхідне через те, що  $l_m^* \in N$ . Враховуючи величину константи  $c$ , чисельник дробу (9) завжди буде меншим за  $2h$ , тобто незалежно від значень  $h$  та  $c$  за рахунок округлення будемо мати  $l_m^* = 2$ .

На відміну від  $l_m^*$ , у загальному випадку  $l_{Pm}^* \in Q$ . Це означає, що вираз для розрахунку довжини упорядкування з перериваннями є аналогічним до (9) за винятком округлення, тобто

$$l_{II}^* = \frac{h+c}{h} = 1 + \frac{c}{h}. \quad (10)$$

Підставивши (9) та (10) у (8), маємо

$$\frac{\left(1 + \frac{c}{h}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{c}{2h}. \quad (11)$$

Нарешті, підставивши (11) у (1) одержуємо

$$W = \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2h}\right)\right) \cdot 100\%,$$

а спростивши цей вираз, отримуємо

$$W = \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2h}\right) \cdot 100\%. \quad (12)$$

IV. У випадку  $(k-1)h < m < kh$  маємо

$$l_m^* = \left\lceil \frac{(k-1)h+c}{h} \right\rceil = k, \quad (13)$$

і відповідно

$$l_{II m}^* = \frac{(k-1)h+c}{h} = k - 1 + \frac{c}{h}. \quad (14)$$

Тоді відношення матиме вигляд

$$\frac{\left(k - 1 + \frac{c}{h}\right)}{k} = 1 - \frac{1}{k} + \frac{c}{kh}, \quad (15)$$

що при підставленні в (1) дає

$$W = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{c}{kh}\right)\right) \cdot 100\%,$$

або при спрощенні

$$W = \left(\frac{1}{k} - \frac{c}{kh}\right) \cdot 100\%. \quad (16)$$

Із (16) легко бачити, що виграш дійсно не залежить безпосередньо від кількості вершин  $m$ , натомість залежить від частки  $k$  при діленні  $\frac{m}{h}$  націло та числа  $c$ , яке є остачею від цього ділення. У тому, що (16) є узагальненням легко переконатися, адже при підставленні  $k = 2$  одержимо випадок III.

**Висновки.** В результаті проведеного дослідження для повних дводольних орграфів було визначено, від яких вхідних даних задачі паралельного упорядкування залежить величина виграшу за умови дозволу переривань. Для довільних значень кількості вершин графа та ширини упорядкування також було виведено формулу оцінки цього виграшу в аналітичному вигляді.

### **Бібліографічні посилання**

1. Коваленко Є.О., Турчина В.А. Аналіз структури графів в задачах паралельного упорядкування з перериваннями. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем». 2021. С.86-90.
2. Коваленко Є.О., Турчина В.А. Аналіз впливу структури графів на оптимальність розв'язку задач паралельного упорядкування з перериваннями. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро, 2021. С. 94-104.
3. Турчина В.А., Коваленко Є.О. Паралельні упорядкування для повних дводольних графів. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2022. С.82-86.
4. Бурдюк В.Я., Турчина В.А. Алгоритмы параллельного упорядочения: учебное пособие. Д.: ДГУ, 1985. 84 с.

*Надійшла до редколегії 03.10.2022.*

## ДО ВІДОМА АВТОРІВ

У статті подають представлені результати нових досліджень автора з повним їх обґрунтуванням. Посилання на неопубліковані праці недопустиме. Статті можуть бути написані українською, російською та англійською мовами. Обсяг статті – 12 -20 сторінок.

Структура рукопису статті (згідно з вимогами Постанови ВАК України № 7-05/1 від 15 січня 2003 р.):

- **анотація** трьома мовами (українська, англійська, російська) – не більше 5 рядків. Якщо стаття написана українською мовою, обсяг англійської анотації повинен складати не менш 1800 знаків. Якщо мова статті – англійська, обсяг української анотації повинен складати не менш 1800 знаків. Якщо мова статті – російська, обсяг англійської та української анотації повинен складати не менш 1800 знаків.
- **Ключові слова** – трьома мовами (українська, англійська, російська);
- постановка проблеми в загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими або практичними задачами, аналіз досягнень і публікацій за тематикою дослідження даної проблеми, наголошення на невирішених раніше питаннях загальної проблеми, розглядуваних у статті (**Вступ**);
- постановка розглядуваної задачі (**Постановка задачі**);
- викладення основного матеріалу з повним обґрунтуванням одержаних наукових результатів (**Метод розв'язання** та **Аналіз одержаних результатів**);
- висновки за проведеними дослідженнями і перспективи подальших досліджень (**Висновки**).
- На окремому аркуші додати назву статті, прізвища авторів та їх місце роботи трьома мовами (українська, російська, англійська).

### Вимоги до набору:

- текст слід набирати в MS Word 97-2003 (\*.doc), **шрифт** – Times New Roman;
- формат паперу – А4 (210x297), книжкова орієнтація;



- параметри сторінки (поля): - верхнє – 20 мм; нижнє – 20 мм; ліве – 25 мм; праве – 20 мм.
- автоматичні переноси; сторінки не нумерують, відсутність «висячих» рядків; абзац (відступ першого рядка) – 5 мм;
- стиль і форматування для елементів статті (таблиця):

<b>УДК</b>	<i>Шрифт: Times, 14 pt, прямий, усі літери великі; вирівнювання: за лівим краєм; міжрядковий інтервал: одинарний; інтервал після: 12 pt</i>
<b>Ініціали і прізвища авторів</b> (прізвище, ім'я, по батькові)	<i>Шрифт: Times, 14 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний;</i>
<b>Місце роботи</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, курсив; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний; інтервал після: 12 pt</i>
<b>Назва статті</b>	<i>Шрифт: Times, 14 pt, напівжирний, прямий, усі літери великі; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний; інтервал після: 12 pt</i>
<b>Анотація</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за шириною; міжрядковий інтервал: одинарний; інтервал після: 12 pt</i>
<b>Основний текст статті</b>	<i>Шрифт: Times, 14 pt, прямий; вирівнювання: за шириною; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
<b>Заголовки структурних елементів статті</b>	<i>Шрифт: Times, 14 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за шириною; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
<b>Заголовок «Бібліографічні посилання»</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
<b>Бібліографічні посилання в алфавітному порядку (зразок наведено нижче)</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, (ПБ – напівжирний, решта ні) прямий, нумерований список; вирівнювання: за шириною; відступ: номера – 0 мм, тексту: 5 мм; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
<b>Дата надходження до редколегії</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, курсив; вирівнювання: за лівим краєм; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
<b>Підписунокві підписи</b>	<i>Шрифт: Times, 12 pt, напівжирний, прямий; вирівнювання: за серединою</i>

<b>Назва таблиці</b> (перший рядок: слово Таблиця; другий: її назва)	<i>Шрифт: Times, 12 pt,</i> <i>перший рядок: курсив; вирівнювання: за правим краєм;</i> <i>міжрядковий інтервал: одинарний;</i> <i>другий рядок напівжирний, прямий; вирівнювання: за</i> <i>серединою; міжрядковий інтервал: одинарний</i>
---	---

**УВАГА!**

Лапки : « »

Дефіс : - .

Тире : – .

- **УВАГА! Бібліографічні посилання оформлюють за зразком:**

1. Белоносов С.М., Черноус И.Л. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. М.: Наука, 1985. 312 с.
2. Евдокимов Д.В., Фетищев А.Н. Построение матриц фундаментальных решений для системы уравнений Стокса. *Вестн. Херсон. гос. техн. ун-та.* 2003. № 3 (19). С. 127–130.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамович, И. Стиган. М., 1979.

- рисунки виконують у будь-якому форматі, імпортованому графічними фільтрами MS Word. Рисунки вставляють у текст статті як окремий незалежний об'єкт (положення – у тексті), при цьому можна пересувати текст стосовно нього. Під рисунком обов'язково подають пояснювальний підпис із номером рисунка.
- формули набирають у редакторі MathType (Шрифт: Times, 14 pt); якщо формула з номером, то вирівнюють за центром з стандартними установками. Латинські букви у формулах набирають курсивом, грецькі - прямим, математичні позначення (sin, cos, tg, lim, ln, const, max, min, знак диференціала d) - прямим.

**До редакційної колегії потрібно подати:**

- у роздрукованому вигляді примірник статті, набраний згідно з вимогами щодо стилю й форматування для елементів статті, наведених вище;
- електронний варіант статті, набраний згідно з вимогами стосовно стилю й форматування для елементів статті, поданих вище;
- рецензію на статтю за підписом д-ра фіз.-мат. наук;
- експертний висновок про можливість публікації статті;
- довідку про оригінальність твору.

**Статті, виконані з порушенням правил, до збірника включені не будуть.**

Адреса редколегії: Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, кафедра обчислювальної математики та математичної кібернетики, просп. Яворницького, 35, корп. №3, м. Дніпро.

Електронна пошта [rrmimm@ukr.net](mailto:rrmimm@ukr.net).

**Офіційний веб-сайт видання:** <https://pm-mm.dp.ua/index.php/pmmm>

## ЗМІСТ

<b>Я.С. Бондаренко</b> Вибіркове обстеження домогосподарств StatVillage	3
<b>А.Ф. Булат, О.М. Кісельова, Л.Л. Гарт, О.М. Притоманова</b> Математичні моделі двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття в умовах невизначеності	11
<b>Л.Л. Гарт</b> Проекційно-ітераційна реалізація явних двошарових ітераційних методів для розв'язування некоректних операторних рівнянь	24
<b>С.В. Диханов, Н.А. Гук</b> Аналіз вмісту вебсторінок із застосуванням частотної моделі тексту	40
<b>Д.І. Єгошкін, Н.А. Гук</b> Адаптивний алгоритм редукції нечіткої бази правил на основі даних навчальної вибірки	49
<b>К.Є. Золотько, Д.В. Красношарпа</b> Управління та діагностика надання ІТ-сервісів	60
<b>К.Д. Караваєв, В.А. Турчина</b> Узагальнення задач упорядкування з урахуванням неповного завантаження	67
<b>Н.Л. Козакова, О.В. Черницька, П.О. Шейченко</b> Застосування евристичних алгоритмів для формування кредитного портфеля банку	80
<b>Д.В. Красношарпа, К.Є. Золотько</b> Моделювання управління сонячним випромінюванням з використанням орбітальних дзеркал з урахуванням залежності альbedo Землі від температури	89
<b>О.С. Магас</b> Конструювання нейронної мережі для апроксимації розв'язку оберненої задачі з нелінійним еліптичним оператором	95
<b>О.О. Maliienko, V.A.Turchyna</b> The study of the influence of combined changes in the initial data on the occurrence of anomalies for resource allocation	106
<b>Т.В. Наконечна, О.В. Нікулін</b> Використання семантичних мереж при підготовці фахівців	113
<b>Н.І. Послайко</b> Дослідження перехідного режиму в системі масового обслуговування типу $M/M/m$ з урахуванням економічного ефекту від обслуговування заявок	126

<b>О.П. Соф'їн, А.Є. Шевельова</b> Розробка алгоритму генерації керуючих скінченних автоматів Мілі в задачі про штучного мураха	135
<b>В.М. Турчин, О.Є. Лоскутов, М.В. Сотула</b> Статистичний аналіз антропометричних характеристик каналу стегнової кістки	143
<b>В.М. Турчин, О.Є. Лоскутов, М.В. Сотула</b> Щодо розподілу деяких функціоналів на класах імплантатів кульшового суглоба	150
<b>В.А. Турчина Є.О. Коваленко</b> Вплив початкових даних задачі паралельного упорядкування з перериваннями на оптимальність розв'язку	158
<b>ДО ВІДОМА АВТОРІВ</b>	168

Наукове фахове видання категорії Б в галузі фізико-математичних наук  
(Наказ МОН України від 17.03. 2020 № 409)

**ПИТАННЯ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ**

**Збірник наукових праць**

**Випуск 22**

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію  
державного засобу масової інформації  
серія КВ № 23168-13008 ПР від 11.12. 2017 р.

Редактор *О.М. Гордієнко*  
Комп'ютерна верстка *Н.Є. Яцечко*

---

Підписано до друку 09.12.2022. Формат 60×84  $\frac{1}{16}$ . Папір друкарський.  
Друк плоский. Гарнітура TimesNewRoman. Ум. друк. арк. 13,5.  
Тираж 100 пр. Зам. № 227.

---

Видавництво та друкарня ПП "ЛІРА ЛТД"  
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5  
Свідоцтво про внесення до Держреєстру  
ДК № 6042 від 26.02.2018